



复变函数与积分变换复习资料

作者：钱院学辅、钱学组、越杰学组

版本：v.1.0.1



序

《复变函数与积分变换复习资料》(以下简称“本资料”)是基于高等教育出版社,王绵森主编的《复变函数(第二版)》与高等教育出版社出版,张元林主编的《工程数学-积分变换(第六版)》的知识内容与体系,针对西安交通大学《复变函数与积分变换》课程(以下简称“复变”)及其期末考试,由钱学组与越杰学组联合编写的复习资料。

复变函数与积分变换在工科的学习与实践中的地位,它的作用主要体现在三个层面:

- 简化计算:将复杂的微分方程、积分方程转化为代数方程(如拉普拉斯变换),大幅降低工程问题的求解难度。
- 精准建模:直接描述具有“幅值+相位”双重属性的物理量(如交流电、机械振动),比实变函数更贴合工程实际。
- 数学基础:为机、电类不同分支(如机械振动、电磁场、信号处理)提供统一的数学分析框架,是学习后续专业课程,如信号与系统的基础。

基于复变课程的重要性,为帮助广大同学学习与复习复变课程,钱院学辅、钱学组与越杰学组组织同学们编写了本资料。

本资料共分为两个部分,七个章节,分别对应《复变函数》在复变课程教学实践中所教授的五章,《工程数学-积分变换》的两章。第一部分复变函数中,第1章由越杰 2401 顾博文编写,第2、3章由电气钱 2401 高孜卓编写,第4、5章由电气钱 2401 陈梓瑄,由高孜卓统稿;第二部分积分变换中,第6章由自动化钱 2401 石骥弘编写,第7章由越杰 2401 宋颖佳编写,由石骥弘统稿。整体由自动化钱 2401 张云泽审核。

本资料的定位是服务于最广大同学复变课程的复习与期末备考。在编写思路,本资料每一章都由主要内容、考点解析、习题或习题补充三节构成。主要内容是对本章内容的高度概括与凝练,涉及各章节的概念的定义、定理及其推论等内容,可以作为学习时的笔记或复习时的参考;考点解析是依据西安交通大学复变课程的往年真题,对本章节常考的知识点与题型作以总结归纳,给出各题型的解题方法与例题;习题补充是依据本章节的课后习题与辅导资料,补充一些重要的知识点或结论用以拓展,需要注意的是, **习题补充的部分一般不在考试的范围**内,为选看内容。

对不同程度的同学,本资料有不同的使用建议。本资料的核心与特色是考点解析,是直指期末考试的应试备考内容,目的明确,所有同学都可以从中获益:大部分同学可以沿着解析中对不同题型的分类与给出的做题方法掌握期末考试中同类型的大部分题目,逐点击破,最

后拿下期末试卷；对于程度较好的同学，该部分可以作为参考。主要内容部分的作用是用于知识点的查缺补漏或速查，由于表述凝练，该部分适用于阅读过一遍课本而需要对知识点进行归纳的同学，不适用于对知识点尚未形成基本理解的同学。习题补充部分是从课本的课后习题与辅导书选择一些内容用于拓展，学有余力的同学可以关注该部分，但由于本资料的定位，该部分不是本资料的重心。备考时，建议以主要内容与考点解析部分为重心。

由于编者能力有限，本资料中难免有纰漏，如果有任何问题或建议，还请谅解并与我们取得联系¹，进行修改。

最后，预祝大家期末考试顺利！

《复变函数与积分变换复习资料》编写小组

2025 年 10 月

¹错误反馈渠道：technicolor@stu.xjtu.edu.cn

目录

第一部分 复变函数	1
第 1 章 复数与复变函数	2
1.1 主要内容	2
1.1.1 复数及其代数运算	2
1.1.2 复数的几何表示	3
1.1.3 复数的乘幂与方根	6
1.1.4 区域	7
1.1.5 复变函数	10
1.1.6 复变函数的极限和连续性	12
1.2 考点解析	13
1.2.1 复数的表示法和运算	13
1.2.2 复变函数的几何映射	15
1.2.3 复方程的几何表示	16
1.3 习题补充	17
第 2 章 解析函数	22
2.1 主要内容	22
2.1.1 复变函数的导数	22
2.1.2 解析函数的概念及其判据	23
2.1.3 初等函数	24
2.2 考点解析	28
2.2.1 复变函数的相关概念辨析	28
2.2.2 函数可导与解析的应用	30
2.2.3 函数可导与解析的判别	33
2.2.4 初等函数性质及计算	34
2.3 习题补充	37
第 3 章 复变函数的积分	39

3.1	主要内容	39
3.1.1	复变函数积分的定义与性质	39
3.1.2	柯西-古萨基本定理及其推广	40
3.1.3	积分的计算	42
3.1.4	解析函数与调和函数	44
3.2	考点解析	46
3.2.1	积分的计算	46
3.2.2	解析函数与调和函数的关系	51
3.3	习题补充	54
第4章	级数	55
4.1	主要内容	55
4.1.1	复数项级数	55
4.1.2	幂级数	56
4.1.3	泰勒级数	59
4.1.4	洛朗级数	60
4.2	考点解析	62
4.2.1	求幂级数的收敛半径	62
4.2.2	将函数展开为泰勒级数	63
4.2.3	将函数展开为洛朗级数	68
4.2.4	求幂级数的和函数	69
4.3	习题补充	70
第5章	留数	73
5.1	主要内容	73
5.1.1	孤立奇点	73
5.1.2	留数	75
5.1.3	留数在定积分计算上的应用	77
5.1.4	对数留数与辐角原理*	78
5.2	考点解析	79
5.2.1	孤立奇点的类型判断	79
5.2.2	留数的计算	81
5.2.3	利用留数定理计算围道积分	83

5.2.4	利用留数计算实积分	85
5.3	习题补充	87
第二部分 积分变换		91
第 6 章 Fourier 变换		92
6.1	主要内容	92
6.1.1	Fourier 积分	92
6.1.2	Fourier 变换的定义	93
6.1.3	δ 函数的定义与性质	94
6.1.4	Fourier 变换的性质	95
6.1.5	基本 Fourier 变换对	99
6.1.6	卷积及其性质	104
6.2	考点解析	105
6.2.1	求 Fourier 积分表达式并推证积分结果	105
6.2.2	通过定义求 Fourier 变换	106
6.2.3	通过常见函数的 Fourier 变换与相关性质求 Fourier 变换	106
6.2.4	利用 Fourier 变换求反常积分	107
6.2.5	求函数的卷积	108
6.2.6	利用卷积定理求 Fourier 变换	108
第 6 章 练习		109
第 7 章 Laplace 变换		111
7.1	主要内容	111
7.1.1	Laplace 变换的定义	111
7.1.2	常用函数的 Laplace 变换	111
7.1.3	Laplace 变换的性质	112
7.1.4	Laplace 变换下的卷积	114
7.1.5	Laplace 逆变换及其计算方法	115
7.2	考点解析	116
7.2.1	直接计算函数的 Laplace 变换	116
7.2.2	利用性质计算 Laplace 变换	117
7.2.3	利用 Laplace 变换求积分	118

7.2.4	利用卷积定理求 Laplace 逆变换	119
7.2.5	利用性质计算 Laplace 逆变换	122
7.2.6	利用留数计算 Laplace 逆变换	123
7.2.7	利用 Laplace 变换解微分、积分方程	123
第 7 章	练习	124

第一部分

复变函数

第 1 章 复数与复变函数

1.1 主要内容

1.1.1 复数及其代数运算

1. 复数的概念

定义 1.1 (复数)

对于任意的两个实数 x, y , 我们称 $z = x + iy$ 为复数, i 是复数单位, 满足 $i^2 = -1$; 其中 x, y 分别称为 z 的实部和虚部, 记作

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z).$$

其中, 实部和虚部均是实数. 当 $x = 0, y \neq 0$ 时, z 是纯虚数.

我们把实部相同而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为共轭复数, 与复数 $z = x + iy$ 共轭的复数记作 $\bar{z} = x - iy$



两个一般的复数是不能比较大小的.

2. 复数的代数运算

定义 1.2 (复数的运算)

两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的四则运算定义如下:

$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \quad (1.1)$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.2)$$

我们称满足

$$z_2 z = z_1 (z_2 \neq 0)$$

的复数 z 是 z_1 与 z_2 的商, 记作 $z = \frac{z_1}{z_2}$. 则有

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.3)$$

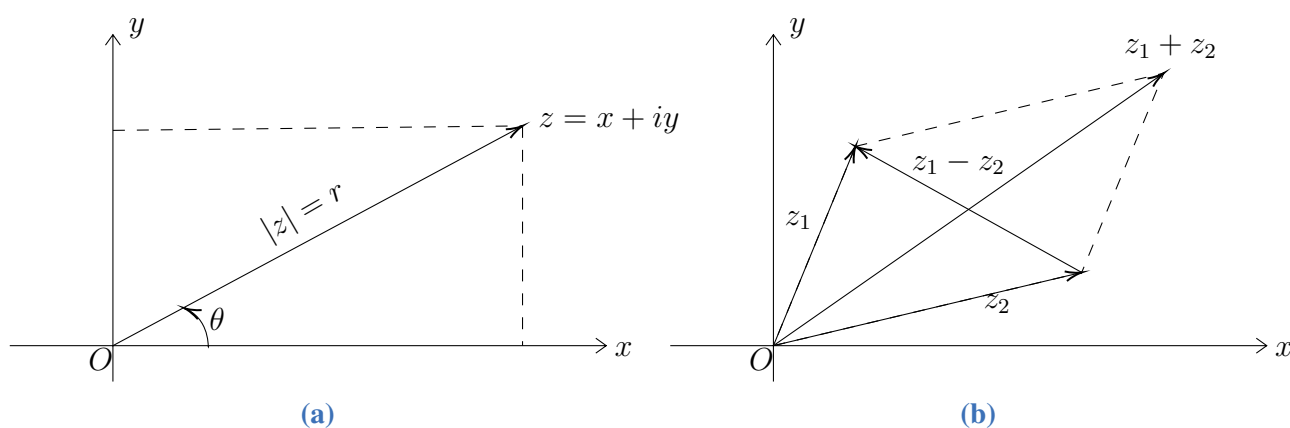


复数的运算满足交换律、结合律、分配律.

共轭复数的运算性质:

- 1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- 2) $z\overline{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2$.
- 3) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$.

1.1.2 复数的几何表示



1. 复平面

定义 1.3 (复数的模)

取一个平面直角坐标系, 将 x 轴称为实轴, 将 y 轴称为虚轴, 就得到了一个复平面, 其上的每一个点 (x, y) 或者 (x, y) 向量都与一个复数 $z = x + iy$ 一一对应, 向量的长度称为 z 的模, 记作

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



关于模, 我们有一个常用的等式:

$$z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2. \quad (1.4)$$

2. 辐角

如上图 (a) 所示, θ 就是 z 的一个辐角.

进一步的,

定义 1.4 (辐角)

任何以 z 的向量为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角, 记作

$$\operatorname{Arg} z = \theta,$$

$$\tan(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}.$$

显然辐角有无数个. 我们把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的 θ_0 称为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值, 记作 $\theta_0 = \arg z$. 即:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

注 $z = 0$ 没有对应的辐角, 辐角对其是无意义的, 正如零向量没有确定的方向. 

辐角主值 $\arg z (z \neq 0)$ 可以由 $\arctan \frac{y}{x}$ 按下列关系确定:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & (x > 0) \\ \pm \frac{\pi}{2}, & (x = 0, y \neq 0) \\ \arctan \frac{y}{x} \pm \pi, & (x < 0, y \neq 0) \\ \pi, & (x < 0, y = 0) \end{cases} \quad (1.5)$$

其中 $-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$.

3. 三角不等式

既然平面向量中有三角不等式, 复数也会有三角不等式. 如上图 (b) 所示, 有

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad (1.6)$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \quad (1.7)$$

更进一步的, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| \quad (1.8)$$

4. 复数的三角表示式和指数表示式

直角坐标转换成极坐标, 有

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.9)$$

由欧拉 (Euler) 公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 可知:

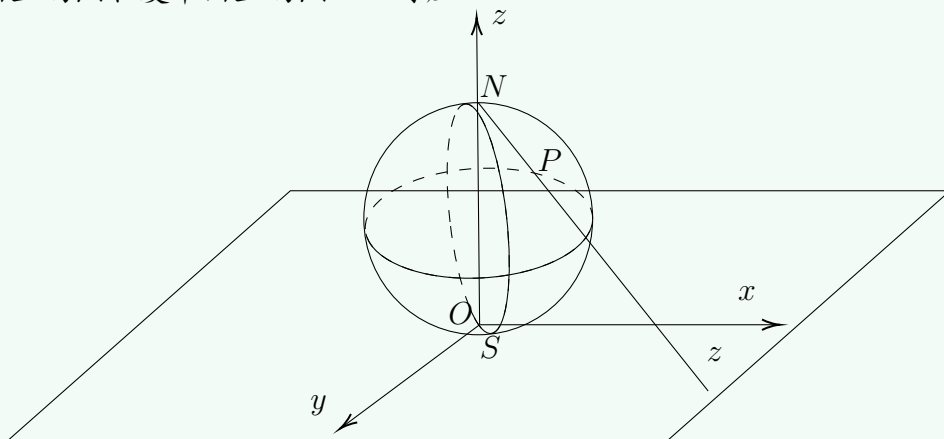
$$z = re^{i\theta} \quad (1.10)$$

5. 复球面

复球面又被称为 Riemann 球面. 复球面的引入主要是要解决 ∞ 的问题. 在前述的复平面中只能表示有限的复数, 而不能直观理解复数中的“无穷大”. 通过复平面的引入, 我们可以很好的解决这个问题.

定义 1.5 (复球面)

取一个与复平面切于原点 $z = 0$ 的球面, 球面上的南极点 S 与原点重合. 通过 S 作垂直于复平面的轴与球面相交于北极点 N . 对于复平面上除了 $z = 0$ 以外的任意数, 都可以通过球面上异于 N 的一个点 P 通过将直线 NP 和复平面的交点得到, 且球面上的点和复平面上的点一一对应.



可以直观地看到, 当点 P 无限接近于北极点 N 的时候, 对应的复数 z 的模长无限变大. 为了保持一一对应的特性, 我们规定复平面上有一个唯一的“无穷远点”与复球面的北极点对应. 并且记作 ∞ .

包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面 $C' = C \cup \{\infty\}$. 不包括无穷远点 ∞ 的复平面称为有限平面.

注 对于无穷远点 ∞ , 实部、虚部、辐角的概念均无任何意义. 对于它的模长, 则规定 $|\infty| = +\infty$.

关于涉及 ∞ 的四则运算有如下规定:

- (a). 加法: $a + \infty = \infty + a = \infty (a \neq \infty)$.
- (b). 减法: $a - \infty = \infty - a = \infty (a \neq \infty)$.
- (c). 乘法: $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty (a \neq 0)$.
- (d). 除法: $\frac{a}{\infty} = 0, \frac{\infty}{a} = \infty (a \neq \infty), \frac{a}{0} = \infty (a \neq 0)$.

(e). $\frac{\infty}{\infty}, \infty \pm \infty, 0 \cdot \infty$ 无意义.



1.1.3 复数的乘幂与方根

1. 乘积与商

定理 1.1 (复数乘积定理)

两个复数乘积的模等于它们模的乘积, 两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和.

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2. \quad (1.11)$$

注 复数的乘积此时却不同于向量的点乘或者叉乘, 有着其特殊的几何意义. 对于一个复数 z_1 , 如果将其乘以一个复数 z_2 , 在复平面上看等效于将原向量拉伸 $|z_2|$ 倍, 然后将其逆时针旋转 θ_2 角度.

由于辐角具有多值性, 所以等式两端是由无穷多个数构成的两个集合. 等式两端相等的含义是两端取的可能值的全体是一样的.



如果采用指数表示式, 该定理的“模长相乘, 辐角相加”的含义会更加清楚.

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned} \quad (1.12)$$

定理 1.2 (复数商定理)

两个复数商的模等于它们模的商, 两个复数商的辐角等于它们辐角的差.

$$\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}, \quad \text{Arg} \left(\frac{z_2}{z_1} \right) = \text{Arg} z_2 - \text{Arg} z_1. \quad (1.13)$$



2. 幂与根

定义 1.6 (复数的幂)

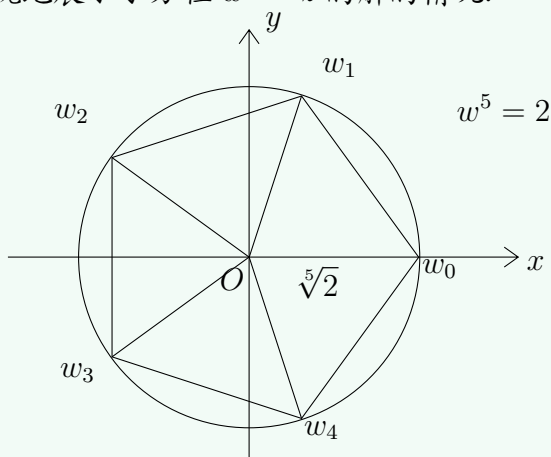
n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂, 即:

$$z_n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n \text{ 个}} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

当 z 的值不等于 0 时, 会有 n 个不同的 w 值与它对应. 满足方程 $w^n = z$ (其中 z 已知) 的 w 称为 z 的 n 次根 $\sqrt[n]{z}$.

注 在几何上, $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n

个顶点. 下面的图直观地展示了方程 $w^n = z$ 的解的情况.



(a). 负整数幂的定义:

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

(b). $z^0 = 1$

(c). 当 $|z| = r = 1$ 时即为棣莫弗 (De Moivre) 公式:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (1.14)$$

(d). 对于方程 $w^n = z$, 设出 w 对照求解即有:

$$w = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \text{ 其中 } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

成为复数 z 的 n 次根.

1.1.4 区域

对于本章节剩下的部分将通过对比高等数学中对应的平行概念的方式复习, 以此加深印象.

1. 区域的概念

对于复变函数, 邻域、点集的内点、开集、闭集、区域、边界点、边界、闭区域、聚点、导集、孤立点、闭包与高数里 $\mathbb{R}^2$ 中的概念理解保持高度一致. 复变函数是一元函数 (算子仅作用在一个自变量上而非多个), 但是由于自变量是复数, 在这些定义上反而更加接近二元函数, 这便是复数的特殊之处. 在这里我们简单地加以回顾这些概念.

定义 1.7 (区域及其相关概念)

- 1) 设 $z_0 \in \mathbb{C}$, 则对 $\forall \delta > 0$, 称集合 $U(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < \delta\}$ 是 z_0 的邻域 $U(z_0, \delta)$, 集合 $U(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 是 z_0 的去心邻域 $U^\circ(z_0, \delta)$
- 2) 设 G 是一个平面点集, z_0 是其中任意一点, 若存在 z_0 的一个邻域是 G 的真子集, 那么称 z_0 是 G 的内点. 设 G 中所有内点的组成的集合是 G 的内部 G° (显然有 $G^\circ \subseteq G$).
- 3) 若 G 内的每个点都是内点, 即 $G^\circ = G$, 则称 G 是开集.
- 4) 若 G 是开集, 那么把 G^c 称为闭集.
- 5) 设 $G \subset \mathbb{C}$, 如果 G 中的任意两个点 M, N 可以用完全属于 G 的有限个线段连接起来, 那么就说 G 是连通的.
- 6) 如果 G 是非空的连通开集, 那么称 G 是一个区域.
- 7) 若 $\exists M > 0$ 使得区域 G 的每个点 z 都满足 $|z| < M$, 那么称区域 G 是有界的, 反之则是无界的.
- 8) 如果有一点 z_0 对于任意的 $\delta > 0$, $U(z_0, \delta)$ 中既有 G 中的点也有 G^c 中的点, 那么 z_0 就是 G 的边界点. G 的所有边界点组成的集合为边界 ∂G .
- 9) 称 $H = G \cup \partial G$ 是闭区域或者闭域.
- 10) 若对任意 $\delta > 0$, 在去心邻域 $U^\circ(z_0, \delta)$ 中总有 G 中的点, 则称 z_0 是 G 的一个聚点. G 所有聚点组成的集合称为 G 的导集 G' .
- 11) 若 $z \in G$ 且 $z \notin G'$, 则称该点 z 是孤立点.
- 12) 称 $\bar{G} = G \cup G'$ 是闭包.

注 限于篇幅, 关于这些概念的理解、相关性质和定理我们将在本章第三节详细论述.

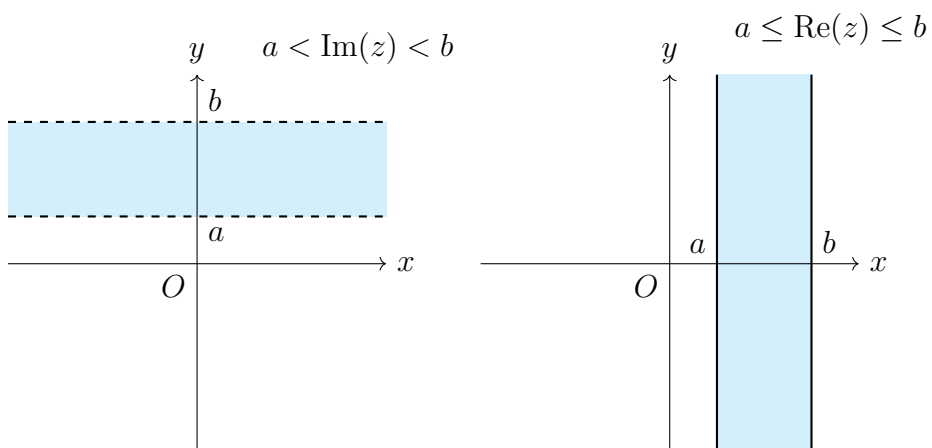


 **练习 1.1** 读者不妨尝试一下利用复球面理解: 若 $G: |z| < 1$, 那么 G^c 是闭集.

下面补充一些常见的区域.

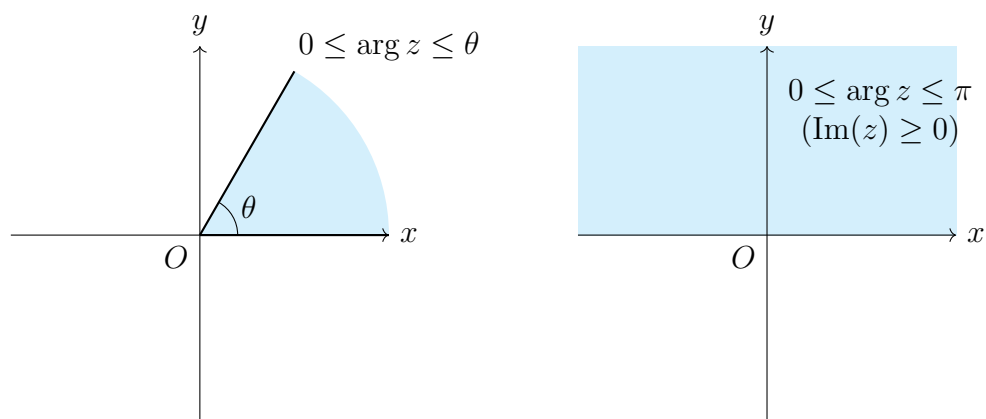
(a). 带型域

常见的带型域如下所示:

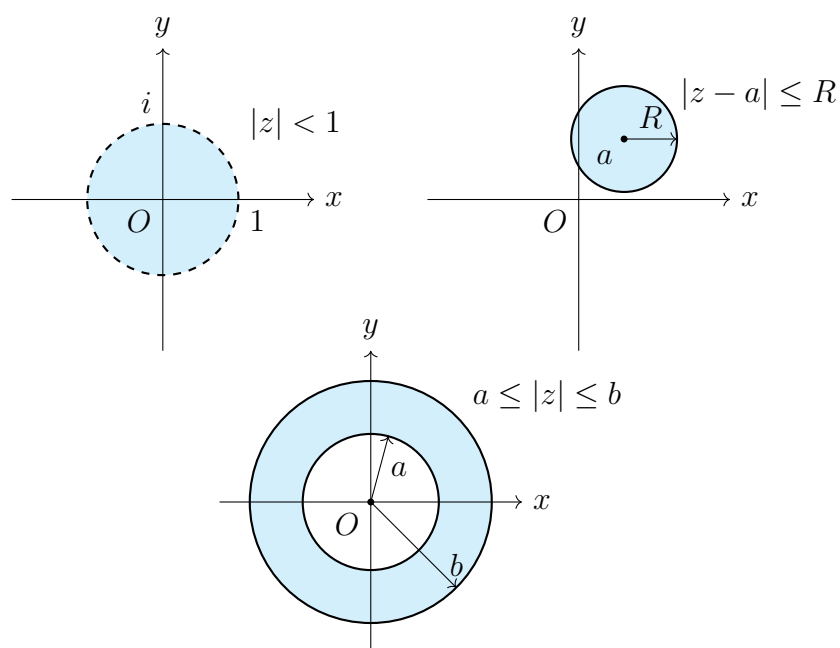


(b). 角形域

常见的角形域如下所示:



(c). 圆域和圆环域



2. 单连通域和多连通域

我们先来看一看在学习 Green 公式的时候, 我们接触到的单连通域和多连通域的概念.

定义 1.8 (平面区域上的单连通域与多连通域)

若平面区域 (σ) 内任意一条闭曲线的内部全部属于 (σ) , 或者说 (σ) 内任意一条闭曲线均可在 (σ) 内连续变形缩小成 (σ) 内的一个点, 则称 (σ) 是一个单连通域; 否则称为多连通域.

注 可以简单理解成, 区域内有“洞”或者“奇点”的就是多连通域.



实际上在复变函数中, 我们仅仅补充了这条定义: 在这里需要阐明“闭曲线”指的是简单闭曲线.

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实变函数, 那么方程组

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

代表一条平面连续曲线. 从而可以用方程

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]. \quad (1.15)$$

来表示这条曲线, 其中曲线的起点和终点分别是 $z(a)$ 和 $z(b)$.

对一条连续曲线 $C: z = z(t) (a \leq t \leq b)$ 来说, 若对任意 $a \leq t_1 \leq b, a \leq t_2 \leq b$, 当 $t_1 = t_2$ 时均有 $z(t_1) = z(t_2)$, 那么称该曲线 C 是一条简单曲线. 若在此基础上 $z(a) = z(b)$, 则 C 是简单闭曲线.

有了上面的说明之后, 我们可以对复变函数中的单连通域和多连通域进行定义.

定义 1.9 (复平面区域上的单连通域与多连通域)

复平面上的一个连通域 B , 如果在其中任意作一条简单闭曲线而曲线内部总是属于 B 的, 那么区域 B 就是单连通域; 反之, 则是多连通域.



1.1.5 复变函数

1. 复变函数的定义

定义 1.10 (复变函数)

设 G 是一些复数 $z = x + iy$ 的集合. 如果有一个确定的法则存在, 按照这一法则, 对于集合 G 中的每一个复数 z , 就有一个或者几个复数 $w = u + iv$ 与之对应, 那么称复变数 w 是复变数 z 的函数 (简称复变函数), 记作

$$w = f(z).$$

其中集合 G 称为函数的定义集合, 对应于 G 中所有 z 的一切 w 值组成的集合 H 称为函数值集合. 如果 z 的一个值只对应 w 的一个值, 那么 $f(z)$ 是单值函数. 如果 z 的一个值对应着 w 的两个或两个以上的值, 那么 $f(z)$ 是多值函数.



如果设 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 那么单值函数 $w = f(z)$ 等价于两个二元实变函数:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

2. 映射的概念

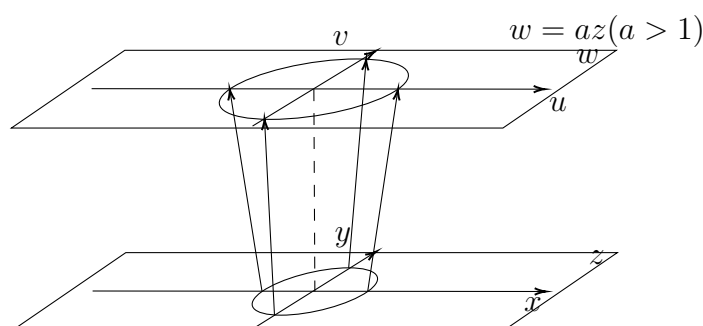
定义 1.11 (映射)

如果用 z 平面上的点表示自变量 z 的值, 而用另一个 w 平面上的点表示函数 w 的值, 那么函数 $w = f(z)$ 就可以看作是 把 z 平面上的一个点集 G 变换到 w 平面上的一个点集 G^* 的映射. 其中, w 称为 z 的像, 而 z 称为 w 的原像.

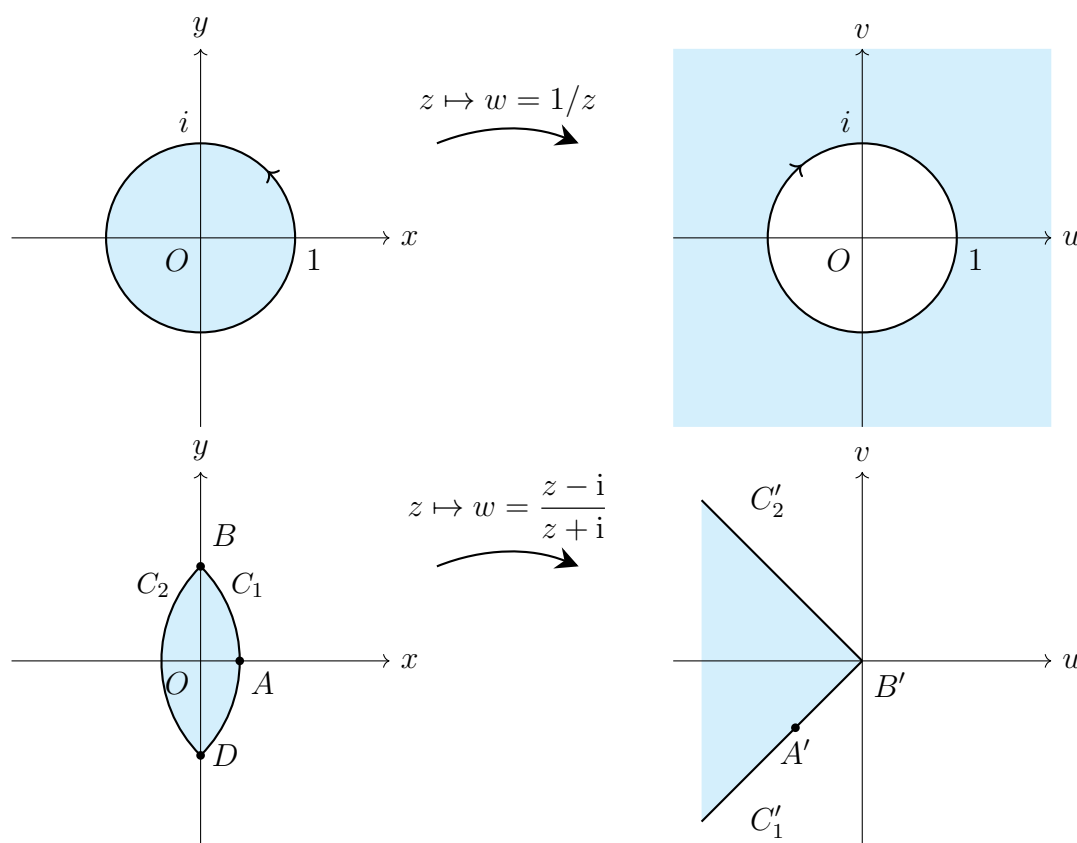


一个复变函数反映了两对变量 u, v 和 x, y 之间的对应关系. 这里有两种直观理解方式:

- 1) 点对点的对应: w 平面内的点 (u, v) 是由 z 平面中的点 (x, y) 映射 (变换) 而来.



- 2) 平面内的变换, 例如下面的图中所展示的



由这种定义可以理解, 多值函数是有意义的.

3. 反函数

定义 1.12 (反函数)

对于复变函数 $w = f(z)$ 来说, 设定义集合为 G , 函数值集合为 H , 那么 H 中的每一个点 w 必将对应着 G 中的一个或几个点. 设这种对应关系为 $z = \varphi(w)$, 那么 $z = \varphi(w)$ 是函数 $w = f(z)$ 的反函数 (或者逆映射). 如果一个复变函数和它的反函数都是单值的, 那么就说 G 和 H 是一一对应的.



1.1.6 复变函数的极限和连续性

1. 复变函数的极限和连续性

复变函数的极限、连续性的定义完全与二元实变函数基本一致.

定义 1.13 (复变函数的计算)

设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $U^\circ(z_0, \rho)$ 内. 如果存在一个确定的数 $A \in \mathbb{C}$, 对于任意的 $\epsilon > 0$, 一定存在一个 $\delta(\epsilon) (0 < \delta \leq \rho)$ 使得当 $z \in U^\circ(z_0, \rho)$ 时有 $|f(z) - A| < \epsilon$, 那么就说 A 是 $f(z)$ 在 z 趋向于 z_0 时的极限, 记作 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$.

注 和多元函数中的情况一样, z 趋向于 z_0 的方式是任意的.



定义 1.14 (复变函数的连续)

如果 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 那么就说 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 就说 $f(z)$ 在 D 内连续.



定理 1.3 (复变函数极限与连续的性质)

1) 复变函数极限存在的充要条件

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u \text{ 且 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v$$

2) 极限的有理运算法则

如果 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, 则有:

(a). $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z);$

(b). $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = AB;$

(c). $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$

3) 复变函数连续的充要条件

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0) \text{ 且 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0)$$

4) 四则运算 (相除时分母不为 0) 和复合嵌套不会改变连续性.



1.2 考点解析

总体来说, 直接考察第一章知识的题目并不多见, 主要出现范围是填空题 (往往是第一题的位置), 主要考察内容是复数的表示法和运算以及复变函数映射, 且常常将知识点融合考察.

1.2.1 复数的表示法和运算

方法分析

这类题型主要分为以下几个类别:

1) 以复数指数形式进行幂运算.

通过把复数转化为指数形式, 结合幂运算法则 $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ 可以有效求解. 解题步骤一般是求出模长和辐角 $\rightarrow$ 按照幂运算法则进行运算.

2) 复数的辐角主值求解.

一般做法是, 先将给定复数利用三角恒等式等化为三角形式 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 再根据辐角

主值和 $\arctan \frac{y}{x}$ 的关系 (1.5) 推导出辐角主值, 最后根据题目所给的角的取值范围验证是否处于 $(-\pi, \pi]$; 或者也可画图验证, 更不易出错.

3) 复方程求解

解题关键是, 将题给方程转化成我们熟悉的形式 $w^n = z$ (一般而言是一定能转化成这个形式的), 然后求解 $w^n = z$ 即可.

总的来说, 就是将复数的几大形式的变化和复数的运算法则结合考察. 此外, 请读者格外注意这里可能涉及到的三角恒等变换的一些内容, 务必熟练掌握.

真题演练

例题 1.1 (2017 年 A 卷/2018 年 A 卷) $(\sqrt{3} - i)^5$ 的指数表示式是 $32e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

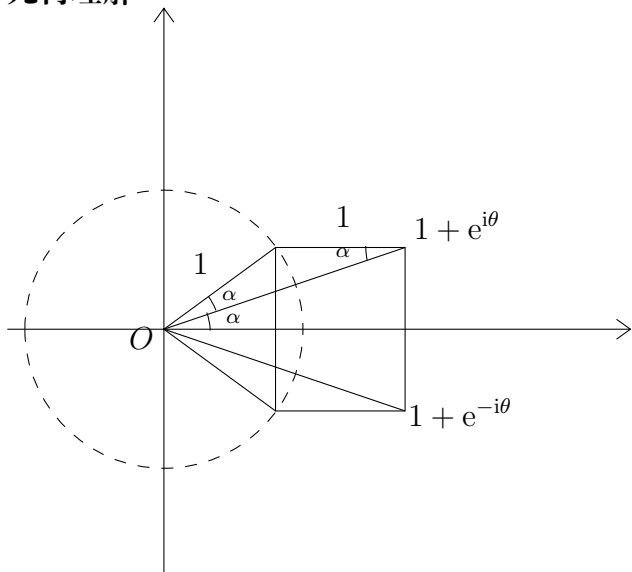
解 考察复数的幂运算以及指数表示法.

$z = \sqrt{3} - i$, 则 $|z| = 2$, $\arg z = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$. 所以 $(\sqrt{3} - i)^5 = [2e^{i(-\frac{\pi}{6})}]^5 = 32e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

例题 1.2 (2018 年 A 卷/2019 年 A 卷) $\left(\frac{1 + e^{i\theta}}{1 + e^{-i\theta}}\right)^n = e^{in\theta}$

解 此题有两种方法看待.

方法一: 几何理解



由图容易知道, $|1 + e^{i\theta}| = |1 + e^{-i\theta}|$, $\theta = 2\alpha$, 故 $\left(\frac{1 + e^{i\theta}}{1 + e^{-i\theta}}\right)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

方法二: 代数理解

$$\left(\frac{1 + e^{i\theta}}{1 + e^{-i\theta}}\right)^n = \left[\frac{e^{i\theta}(1 + e^{-i\theta})}{1 + e^{-i\theta}}\right]^n = e^{in\theta}.$$

练习 1.2 (2023 年 A 卷/2024 年 A 卷) $\left(\frac{1 + e^{\frac{\pi}{6}i}}{1 + e^{-\frac{\pi}{6}i}}\right)^3 = \underline{\hspace{2cm}}.$

练习 1.3 (2023 年 A 卷/2024 年 A 卷) 复数 $1 - \cos \alpha + i \sin \alpha (0 < \alpha < \pi)$ 的辐角主值是 ().

- A. $\frac{\alpha}{2}$
- B. $\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2}$
- C. α
- D. $\pi - \alpha$

练习 1.4 (2018 年 A 卷/2019 年 A 卷) $(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$ 的指数形式是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

例题 1.3 (2018 年 A 卷/2019 年 A 卷) 方程 $(1 + z)^5 = (1 - z)^5$ 的解为 $i \tan \frac{k\pi}{5} (k \in \mathbb{Z})$.

解

先将原方程转化为我们熟悉的 $w^n = z$ 的形式, 即

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5 = 1.$$

也就是说,

$$\frac{1+z}{1-z} = e^{i\frac{2k\pi}{5}} (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

下面证明: $\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} = e^{i2\theta}.$

$$\begin{aligned} \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} &= \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{(1 - i \tan \theta)(1 + i \tan \theta)} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} + i \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \cos 2\theta + i \sin 2\theta \\ &= e^{i2\theta}. \end{aligned}$$

带入 $z = i \tan \theta$, 此时 $\theta = \frac{k\pi}{5}$, 即 $z = i \tan \frac{k\pi}{5}.$

1.2.2 复变函数的几何映射

方法分析

这部分内容的主要考察方式是, 给出某一个函数和映射, 求出像曲线方程的解析式. 常见的映射有上文所展示的反演映射 $w = \frac{1}{z}$ 及其变体, 幂映射 $w = z^n$ 等.

解题步骤也是非常清晰的. 大体上分两步:

- 1) 将原像曲线转化为复数形式;

2) 把转化好的复方程带入题给映射.

值得注意的是, 考试中的映射一般是所谓的共形映射或者保角变换, 他们有许多独特有趣的性质, 这一部分我们留在本章第三节以几个常见共形映射为例子进行非常简略的介绍, 如果需要进一步了解请参考《复变函数》教材第六章“共形映射”部分内容学习.

真题演练

例题 1.4 (2018 年 A 卷/2019 年 A 卷) 曲线 $x^2 + y^2 = 4$ 在映射 $w = \frac{1}{z}$ 下的像曲线方程为 $|w| = \frac{1}{2}$.

解 原曲线方程可表示为 $|z| = 2$. 则由等式 (1.4) 有 $w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{4}\bar{z}$, 则 $|w| = \frac{1}{4}|z| = \frac{1}{2}$.

 **练习 1.5** (2018 年 A 卷/2019 年 A 卷) 在 $w = z^3$ 映射下, 直线 $z = (1+i)t$ 的像曲线为 _____.

 **练习 1.6** (2015 年 A 卷/2016 年 A 卷) 对于映射 $w = \frac{i}{z}$, 圆周 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的像曲线为 _____.

 **练习 1.7** 函数 $w = \frac{1}{z}$ 把下列 z 平面上的曲线映射成 w 平面上怎样的曲线?

1) $y = x$; 2) $x = 1$; 3) $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

1.2.3 复方程的几何表示

方法分析

考法是给定一个由复方程, 对应求出复平面上表示的点集.

这种类型的题一般是非常直白的, 带入 $z = x + iy$ 化简整理即可.

真题演练

例题 1.5 (2020 年 A 卷/2021 年 A 卷) 不等式 $z\bar{z} + iz - i\bar{z} \leq -1$ 在复平面上表示的点集为 (C)

A. $\{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$.

B. $\{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 \geq 1\}$.

C. $\{(0, 1)\}$.

D. 以上答案均不对.

解 带入 $z = x + iy$, 则有 $z\bar{z} + iz - i\bar{z} = |z|^2 + i(z - \bar{z}) = x^2 + y^2 - 2y \leq -1$, 整理有 $x^2 + (y-1)^2 \leq 0$, 满足条件的只有 $\{(0, 1)\}$.

1.3 习题补充

1. 复数的几何意义在几何问题中的应用

一些简单的几何关系可以用复数的形式简洁地表达出来. 平面上最常见的线-线关系就是平行与垂直.

首先是平行. 如果两个复数对应的向量是平行的, 这就意味着辐角主值相等, 即

$$\arg z_1 = \arg z_2,$$

由 (1.13) 可知,

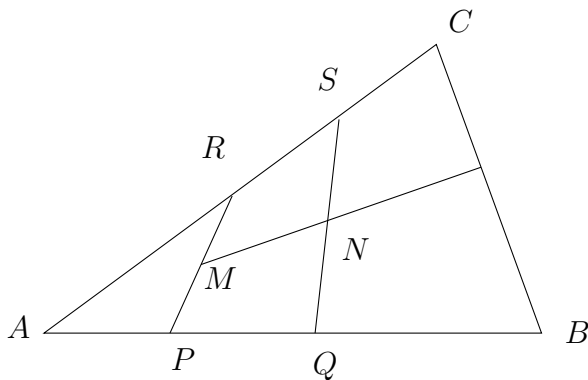
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0, \text{ 即 } \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0,$$

这说明 $\frac{z_1}{z_2}$ 是实数. 进一步有:

$$z_1 \overline{z_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right) |z_2|^2$$

即 $\operatorname{Im}(z_1 \overline{z_2}) = 0$. 类似地, 请读者尝试证明垂直 $\iff \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 0$.

 **练习 1.8** 如下图, $AB = AC$, $PQ = RS$, M 和 N 分别是 PR 和 QS 的中点. 尝试用复数的几何意义证明: $MN \perp BC$.



 **练习 1.9** 复平面上有两条直线:

$$\begin{cases} a\bar{z} + \bar{a}z = c, \\ b\bar{z} + \bar{b}z = d, \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{C}; a \neq 0, b \neq 0; c, d \in \mathbb{R}$$

证明: 两条直线互相垂直的充要条件是 $\operatorname{Re}(a\bar{b}) = 0$.

此外还有点-点关系. 例如, 三点共线, 四点共圆等等.

练习 1.10 证明下面的两条是三点 z_1, z_2, z_3 共线的充要条件: 1) $\operatorname{Im} \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) = 0$.

$$2) \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

练习 1.11 证明四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆的充要条件是 $\operatorname{Im} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right) = 0$.

还有一些对应常见的平面方程的复方程. 例如:

(a). 圆的方程: $z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + c = 0$, 其中 $|a|^2 > c, a \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$

参数方程: $z = z_0 + \cos \theta + i \sin \theta$

(b). 椭圆方程: $|z - a| + |z - b| = c$, 其中 $a, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}, c > |a - b|$

参数方程: $z = z_0 + a \cos \theta + ib \sin \theta$

(c). 双曲线方程: $||z - a| - |z - b|| = c$, 其中 $a, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}, c < |a - b|$

参数方程: $z = z_0 + a \cosh t + ib \sinh t$

2. 定义 (1.7) 的拓展

关于这些概念的理解:

首先是最“基层”的定义: 补集 G^c , 内点 (内部 G°), 边界点 (边界 δG), 外部 $((G^c)^\circ)$, 聚点 (导集 G'), 闭包 $\bar{G}$.

有了这些基础定义之后, 更上一级, 有: 开集 ($G = G^\circ$), 闭集 (G^c 是开集, 或者 $G = \bar{G}$, 或者 $G' \subset G$), 这一级的特征是, 需要基层定义之间满足某种关系形成定义.

最后一层是: 区域 (连通开集), 闭域 (区域加上边界).

此外还需要注意的是, 一些比较容易产生困惑的点, 如 (下面的结论证明从略):

- 一个点集并非不是开集就是闭集. 反例: 单位圆面挖去 x 轴上方的边界部分之后形成的区域.

- 闭集与闭包的关系:

核心的差异点来自于, 闭集已经满足封闭性, 但是闭包是对任意集合的封闭化操作后的集合. 正因如此, 一个集合的闭包一定是闭集 (而且是包含原集合最小闭集), 而闭集的闭包就是自己.

- 导集与边界的关系:

导集有可能和边界完全一致, 例如当 $G = \mathbb{Q}$ 时, $\delta G = G' = \mathbb{R}$. 但是一般情况下, 这是不成立的. 例如 $G: |z| < 1$, 以及 $G = (0, 1) \cup \{2\}$ 的情形.

认为 $\delta G \subseteq G'$ 也是有问题的, 例如 $G = \{0\}$ 时是不成立的 (此时 $G' = \emptyset$). 然而可以肯定的是, $\delta G \subseteq G' \cup (G^c)'$.

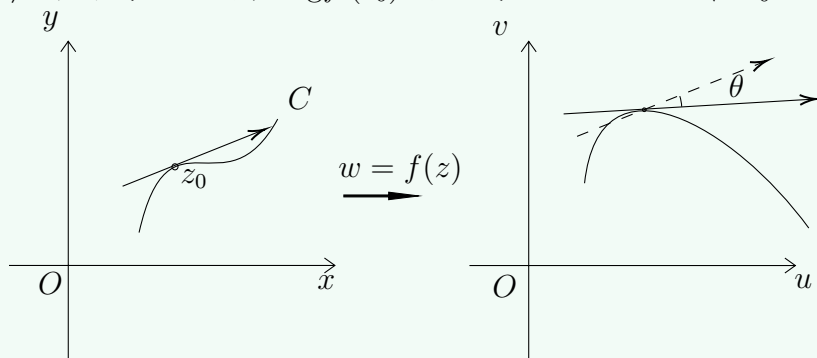
此外二者还有一个显著的不同点: G' 永远不会包含孤立点, 但是 δG 可能包含孤立点.

3. 共形映射简介

受限篇幅, 我们不作任何推导工作, 仅简要介绍概念性的内容和相关性质.

定义 1.15 (转动角)

若在特定区域内存在一个解析函数 $w = f(z)$ 且在一条曲线 C 上的特定点 z_0 处的导数 $f'(z_0) \neq 0$, 则我们称辐角 $\text{Arg} f'(z_0)$ 是曲线 C 经过该映射在 z_0 处的转动角.



由上面的定义可以知道, 一旦映射给定, 转动角的大小与方向和曲线 C 的形状和方向无关, 也就是说具有转动角的不变性. 由此, 更进一步我们可以得到保角定理.

定理 1.4 (保角性)

设特定区域内有任意两条曲线 C_1 和 C_2 相交于点 z_0 且在 z_0 处具有一个夹角, 则在如上所述的映射 $w = f(z)$ 下对应曲线 Γ_1 和 Γ_2 的对应交点 w_0 处的夹角大小和方向均不变.

此外还有伸缩率的概念, 简单理解就是对任意曲线在某一点处的一小段弧放大缩小的倍率.

定义 1.16 (伸缩率)

若在特定区域内存在一个解析函数 $w = f(z)$ 且在一条曲线 C 上的特定点 z_0 处的导数 $f'(z_0) \neq 0$, 则我们称 $|f'(z_0)|$ 是曲线 C 经过该映射在 z_0 处的伸缩率.

类似保角性的道理, 我们又有下面的定理:

定理 1.5 (伸缩率不变性)

通过特定区域某一点 z_0 处的任何一条曲线的伸缩率在映射 $w = f(z)$ 下均保持不变.

有了上述定义和定理的支撑, 我们可以给出共形映射的概念和相关定理.

定义 1.17

设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的邻域内有定义, 且在 z_0 具有保角性和伸缩率的不变性, 那么称映射 $w = f(z)$ 在 z_0 处是共形的. 如果 $w = f(z)$ 在一个区域 D 中的每一个点都是共形的, 那么称 $w = f(z)$ 是区域 D 内的共形映射.



定理 1.6 (共形映射充要条件)

如果函数 $w = f(z)$ 在 z_0 处解析, 且 $f'(z_0) \neq 0$, 则映射在 z_0 处是共形的. 如果 $w = f(z)$ 在一个区域 D 中处处解析, 则 $w = f(z)$ 是区域 D 内的共形映射.



一类很重要的共形映射是分式线性映射或者双线性映射、莫比乌斯映射, 也就是形如:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

的映射.

当我们取 $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$ 时, 就是很经典的反演映射 $w = \frac{1}{z}$. 实际上, 反演映射不仅是分式线性映射的一个特例, 也可以看成其中的一个组成部分.

那么, 分式线性映射具有哪些性质呢?

实际上, 分式线性映射可以拆解为三个基本子映射并分别研究它们的性质. 这三个映射分别是:

$$1) w = z + b; \quad 2) w = az; \quad 3) w = \frac{1}{z}.$$

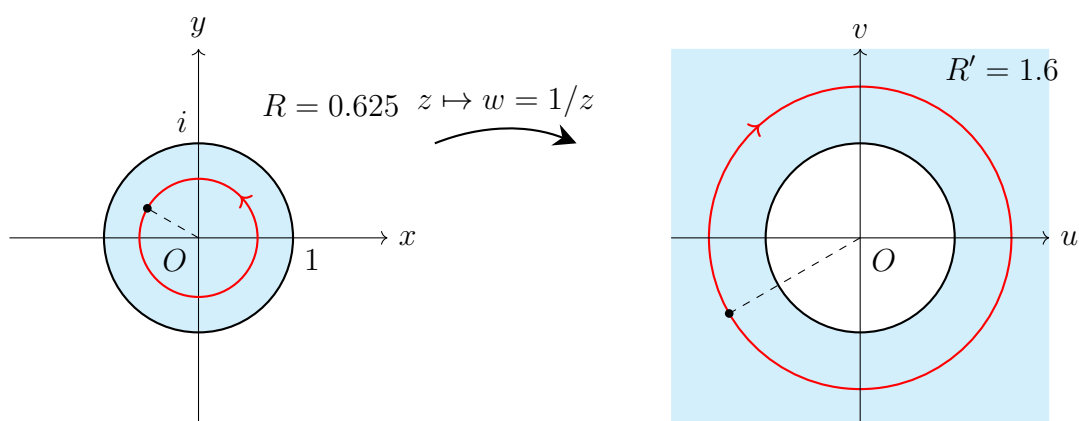
较为容易理解的是 $w = z + b$ 和 $w = az$, 这两个映射分别是平移映射和旋转伸缩映射.

下面我们来重点探讨 $w = \frac{1}{z}$.

不妨令 $z = re^{i\theta}$, 那么有

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)} \quad (r \neq 0)$$

从几何直观理解大概是下图所示的情景.



容易理解, $w = \frac{1}{z}$ 具有保圆性, 也就是会把圆周映射成圆周 (此处要求原像圆不经过原点, 或者圆周理解为扩充复平面上的圆周).

读者可以用 1.2.2 节中的题目简单验证这些性质.

第2章 解析函数

2.1 主要内容

2.1.1 复变函数的导数

1. 导数的定义

定义 2.1 (复变函数的导数)

1) 函数在一点可导的定义

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (2.1)$$

注 $\Delta z \rightarrow 0$ 的方式是任意的.

由定义可知, 沿着任意一个路径趋于 0 的极限不存在, 或任意两个或多个路径趋于 0 的极限不同, 则意味着不可导和导数不存在.

2) 函数在区域 D 内可导 $\Leftrightarrow$ 函数在区域 D 内可导.



2. 可导与连续

可导必连续, 连续不一定可导.

3. 求导法则

复变函数的求导法则与实变函数在形式上完全一致.

1) $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数.

2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为正整数.

3) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$.

4) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

5) $\left[\frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{1}{g^2(z)} [g(z)f'(z) - f(z)g'(z)]$, 其中 $g(z) \neq 0$.

6) $\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z)$, 其中 $w = g(z)$.

7) $f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)}$, 其中 $w = f(z)$ 与 $z = \varphi(w)$ 是两个互为反函数的单值函数, 且 $\varphi'(w) \neq 0$.

4. 微分

函数 $w = f(z)$ 在 z_0 可导与在 z_0 可微是等价的.

函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(z)$ 在 D 内可微.

2.1.2 解析函数的概念及其判据

1. 解析函数的定义

定义 2.2 (解析函数)

- 1) 函数 $f(z)$ 在 z_0 解析 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导
- 2) 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称函数 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数(全纯函数或正则函数) 的充要条件是函数 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析
- 3) 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 那么称 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点.



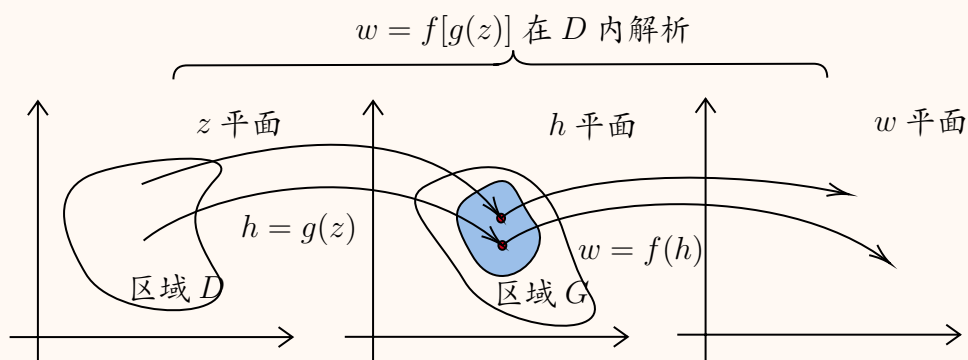
注

- 1) 函数在一点处解析与在一点处可导是两个不等价的概念.
- 2) 函数在区域内解析与在区域内可导是等价的.

2. 解析函数的运算

定理 2.1 (解析函数的运算)

- 1) 在 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点) 在 D 内解析.
- 2) 函数 $h = g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析, 函数 $w = f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析. 对 D 内的每一个点 z , 函数 $g(z)$ 的对应值 h 都属于 $G \Rightarrow$ 复合函数 $w = f[g(z)]$ 在 D 内解析.



3. 函数可导的充要条件

定理 2.2 (函数在一点可导的充要条件)

区域 D 上的函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z = x + iy \in D$ 可导的充要条件是:

- 1) $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微.

2) $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 满足柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2)$$

函数 $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z = x + iy$ 的导数公式:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.3)$$

4. 函数解析的充要条件

定理 2.3 (函数在区域解析的充要条件)

函数 $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在其区域 D 内解析的充要条件是:

- 1) $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 D 内可微.
- 2) $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 D 内满足柯西-黎曼方程 (2.2)

函数 $f(z) = u + iv$ 是解析函数且 $f'(z) \neq 0 \Rightarrow$ 曲线族 $u(x, y) = c_1$ 和 $v(x, y) = c_2$ 是相互正交的.

2.1.3 初等函数

1. 指数函数

(a). 定义

称

$$\exp z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (2.4)$$

为复变数 z 的指数函数. 这等价于

$$\begin{cases} |\exp z| = e^x \\ \operatorname{Arg}(\exp z) = y + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad (2.5)$$

它满足以下的性质:

- 1) $f(z)$ 在复平面内处处解析.
- 2) $f'(z) = f(z)$.
- 3) 当 $\operatorname{Im}(z) = 0$ 时, $f(z) = e^x$, 其中 $x = \operatorname{Re}(z)$.

注 $\exp z$ 也可以写作 e^z , 但此时 e^z 不具有幂的含义, 只是代替 $\exp$ 的记号.

(b). 性质

- 1) 加法定理

即

$$\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2) \quad (2.6)$$

2) 周期性

由加法定律 (2.6) 可得, $\exp z$ 是以 $2k\pi i$ 为周期的函数, 即

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z$$

2. 对数函数

(a). 定义

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \quad (2.7)$$

注 在复变函数中, 负数无对数的结论不再成立.

(b). 性质

1) 多值性

$\operatorname{Ln} z$: 由于 $\operatorname{Arg} z$ 为多值函数, 所以对数函数 $w = \operatorname{Ln} z$ 为多值函数, 并且每两个值相差 $2\pi i$ 的整数倍.

$\operatorname{Ln} z$ 的主值: 式 (2.7) 中的 $\operatorname{Arg} z$ 取主值 $\arg z$, 记为 $\ln z$, 则

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z \quad (2.8)$$

$\operatorname{Ln} z$ 的分支: $\operatorname{Ln} z$ 的其余各值可以利用 $\ln z$ 表示为:

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.9)$$

对于每一个固定的 k , 式 2.9 表示一个单值函数, 成为 $\operatorname{Ln} z$ 的一个分支.

2) 运算性质

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$$

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$$

注 $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ 与 $\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z$ 不再成立, 证明见 2.2.4;

3) 解析性

$\operatorname{Ln} z$ 的各个分支在除去原点及负实轴的平面内解析, 并且导数均为

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}$$

3. 乘幂与幂函数

(a). 定义

$$a^b = e^{b \operatorname{Lna}} \quad (2.10)$$

(b). 值性

1) b 为整数

当 b 为整数时, a^b 具有单一的值.

2) b 为有理数

设 $b = \frac{p}{q}$, 由于

$$\begin{aligned} a^b &= e^{\frac{p}{q} \operatorname{Lna}} \\ &= e^{\frac{p}{q} (\ln a + 2k\pi i)} \end{aligned}$$

故当 $b = \frac{p}{q}$ (p 和 q 为互素的整数, $q > 0$) 为有理数时, a^b 具有 q 个值, 即当 $k = 0, 1, \dots, (q-1)$ 时所对应的值.

3) b 为无理数或复数

当 b 为无理数或复数时, a^b 有无穷多值.

(c). 解析性

1) z^n (n 为正整数) 在复平面内是单值解析函数.2) z^b 在 $b = \frac{p}{q}$ 为有理数时是具有 q 个分支的多值函数, 在 b 为无理数或复数时是无穷多值函数. 它们的各个分支都在除去原点和负实轴的复平面的是解析的, 并且 $(z^b)' = bz^{b-1}$.

4. 三角函数

(a). 定义

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (2.11)$$

1) 欧拉公式:

由定义可知, 欧拉公式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (2.12)$$

对于一般的复数仍然成立.

2) 值域:

$|\sin z| \leq 1$ 和 $|\cos z| \leq 1$ 在复数范围内不再成立.

(b). 性质

1) 周期性

$\cos z$ 与 $\sin z$ 都是以 2π 为周期的函数.

2) 奇偶性

$\cos z$ 为偶函数 ($\cos(-z) = \cos z$), 而 $\sin z$ 为奇函数 ($\sin(-z) = -\sin z$).

3) 导数 $(\cos z)' = -\sin z$ $(\sin z)' = \cos z$

4) 解析性

在复平面内解析.

5) 正弦余弦的公式

$$\begin{cases} \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

6) 三角函数与双曲函数的联系

$$\begin{cases} \cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \operatorname{ch} y \\ \sin iy = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \operatorname{sh} y \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \\ \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y. \end{cases} \quad (2.15)$$

7) 其他三角函数定义

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, & \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z} \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z}, & \csc z &= \frac{1}{\sin z} \end{aligned}$$

5. 双曲函数

(a). 定义

$$\text{双曲余弦} \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{双曲正弦} \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\text{双曲正切} \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

(b). 性质

1) 周期性

$\operatorname{ch} z$ 和 $\operatorname{sh} z$ 都以 $2\pi i$ 为周期.

2) 奇偶性 $\operatorname{ch} z$ 为偶函数, $\operatorname{sh} z$ 为奇函数.

3) 解析性 $\operatorname{ch} z$ 和 $\operatorname{sh} z$ 都是复平面上的解析函数, 且它们的导数为

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$$

4) 双曲函数的公式

$$\begin{cases} \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1; \\ \operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z = \operatorname{ch} 2z \\ \operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2 \\ \operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2. \end{cases} \quad (2.16)$$

5) 双曲函数与三角函数的关系

$$\operatorname{ch} iy = \cos y, \quad \operatorname{sh} iy = i \sin y \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x + iy) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y \\ \operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y \end{cases} \quad (2.18)$$

6. 反三角函数与反双曲函数

(a). 反三角函数

1) 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$

2) 反余弦函数 $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$

3) 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}.$

(b). 反双曲函数

1) 反双曲正弦 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$

2) 反双曲余弦 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z - \sqrt{z^2 + 1})$

3) 反双曲正切 $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}$

2.2 考点解析

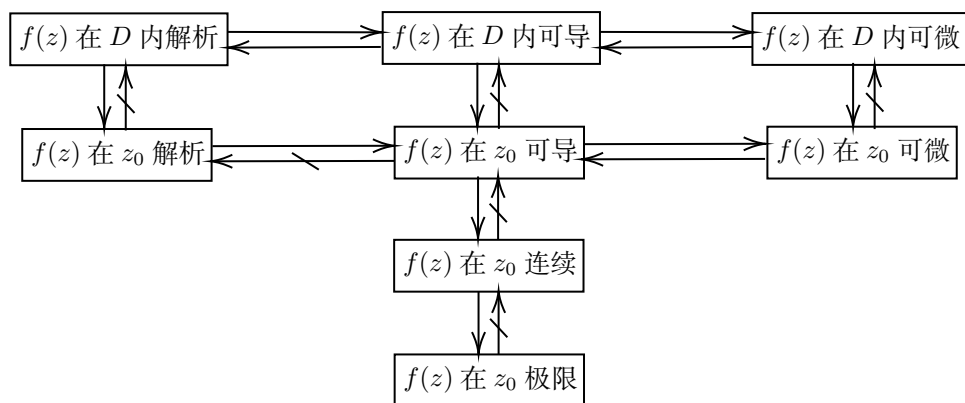
2.2.1 复变函数的相关概念辨析

方法分析

复变函数的极限、连续、可导、可微、解析、奇点这些概念是一组考点, 常以选择题的形式出现, 需要掌握它们的概念和关系. 其中, 尤其以解析的概念需要着重辨析.

首先, 需要明确所有概念的定义, 不要混淆, 可以参考课本与本章的主要内容.

其次, 需要明确所有概念之间的关系. 下面这幅图简单地表达了它们之间的关系.



下面给出一些不能互推的条件典型例子.

1) 有极限而不连续:

函数 $f(z) = \frac{z\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ 在 $z=0$ 处的极限存在, 并且极限值为 0, 但它在 $z=0$ 处不连续.

2) 连续而不可导:

函数 $f(z) = \bar{z}$, $g(z) = x + i2y$ 等函数是在复平面上处处连续但处处不可导的.

3) 可导而不解析:

函数 $f(z) = z\operatorname{Re}(z)$ 与 $g(z) = \bar{z}z^n$ 在 $z=0$ 处可导但不解析.

再者, 要掌握好定理 (2.2) 关于可导的充要条件与定理 (2.3) 关于解析的充要条件的叙述. 主要关注 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 是否满足柯西-黎曼方程, 但也要注意其是否在点 z_0 或 D 内可微. 如果两个条件有任意一个不满足, 则函数在该点必然不可导或在区域内不解析.

一般地, 常把实部与虚部可微扩展成其充分条件即 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 的一阶偏导数存在且连续, 但这是充分条件, 并不是必要条件, 要作以注意和区分.

真题演练

往年的题目一般考察多以基本概念为主, 且解析的概念居多, 具体见下.

例题 2.1 (2020 年 B 卷/2021 年 B 卷) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 解析的充要条件是 (D).

- A. $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内可微;
- B. u_x, u_y, v_x, v_y 在 (x_0, y_0) 的某邻域内存在且连续;
- C. $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处满足 Cauchy-Riemann 方程;
- D. $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内可以展成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$.

解 即使尚未学习过幂级数, 也可以轻易地判断出 ABC 都是错, 从而进一步得出答案是 D.

具体来说, B 显然不对; A 和 C 都只是函数在一点可导, 在区域解析的充要条件的一部分, A 和 C 一同才能构成函数在一点可导, 在区域上解析的充要条件. B 则是 A 的充分条件, 并不是充分必要条件.

进一步,即使有一个选项是由 A 和 C 组成的,对于一个点 z_0 ,如果题目中没有指明这是在点 z_0 及其邻域内成立,则这只能推出 $f(z)$ 在 z_0 可导,并不能推出解析.

例题 2.2 下列命题正确的是 (C) .

- A. 若 z_0 是 $f(z)$ 的奇点,那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导
- B. 若 z_0 是 $f(z)$ 的奇点,那么 z_0 一定是孤立的.
- C. 若 z_0 是 $f(z)$ 的奇点,是 $g(z)$ 的解析点,那么 z_0 一定是 $f(z) + g(z)$ 的奇点
- D. 若 z_0 是 $f(z)$ 的奇点,也是 $g(z)$ 的奇点,那么 z_0 一定是 $f(z) + g(z)$ 的奇点

解 本题考察的是奇点的概念,即不解析的点.

对于 A 选项,函数 $f(z)$ 可以在 z_0 可导,但不在其邻域内可导,故错误.

对于 B 选项,孤立奇点只是奇点的一种(见第五章).

C 选项是正确的,这可以利用反证法与解析函数经过四则运算(分母不为 0)后仍然为解析函数来证明.

D 选项的一个反例可以是 $f(z) = \frac{1}{z}$ 与 $g(z) = -\frac{1}{z}$ 在 $z = 0$ 处.

从 C 与 D 选项可以引申出一个经验结论,即

- 1) 强条件 + 强条件 = 强条件
- 2) 强条件 + 弱条件 = 弱条件
- 3) 弱条件 + 弱条件 = 不确定

这里“强条件”可以是极限存在、可导、解析等,对应的“弱条件”是极限不存在、不可导、不解析等.

2.2.2 函数可导与解析的应用

方法分析

这一类型题目的特点是:条件中给出了函数解析或可导,并需要利用该条件推导出答案.

一般从函数 $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 解析或可导可以推出

- 1) 函数 $f(z)$ 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$ 满足柯西-黎曼方程 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

如果实部与虚部中有未知的部分,则从柯西-黎曼方程出发构造方程组,求出待定常数的值.此类题目更多的处理方式请见第三章.

其他情况则灵活使用柯西-黎曼公式推导结论.

- 2) 函数 $f(z)$ 的导数满足公式 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$.

如果题目中要求求函数在某一点的导数,带入公式,耐心计算即可.

真题演练

在往年的期末考试中,也多以上述的两点三种方式进行考察,只需耐心利用条件推导、计算即可,存在一些计算量较大的题目时,就需要格外注意计算的过程.

例题 2.3 (2019 年 A 题) 已知 $w = u + iv$ 为 z 的解析函数, 且 $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$, 求 u .

解 已知 $w = u + iv$ 是 $z = x + iy$ 的解析函数, 且满足 $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$. 要求

u . 解决方法由于 w 解析, 实部 u 和虚部 v 满足 Cauchy-Riemann 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

给定 $s = u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$. 先展开 s :

$$s = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2) = x^3 + 4x^2y + xy^2 - x^2y - 4xy^2 - y^3 = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3.$$

计算偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3) = 3x^2 + 6xy - 3y^2, \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3) = 3x^2 - 6xy - 3y^2. \end{aligned}$$

设 $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$. 由 $s = u - v$, 有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = p - \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = p + q, \quad (\text{因为 } \frac{\partial v}{\partial x} = -q) \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = q - p. \quad (\text{因为 } \frac{\partial v}{\partial y} = p) \end{aligned}$$

代入偏导数:

$$p + q = 3x^2 + 6xy - 3y^2, \quad (1)$$

$$q - p = 3x^2 - 6xy - 3y^2. \quad (2)$$

解方程组:

- 加 (1) 和 (2): $(p + q) + (q - p) = (3x^2 + 6xy - 3y^2) + (3x^2 - 6xy - 3y^2)$, 得 $2q = 6x^2 - 6y^2$, 所以 $q = 3(x^2 - y^2)$.
- 减 (2) 于 (1): $(p + q) - (q - p) = (3x^2 + 6xy - 3y^2) - (3x^2 - 6xy - 3y^2)$, 得 $2p = 12xy$, 所以 $p = 6xy$.

因此:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p = 6xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q = 3x^2 - 3y^2.$$

积分 $\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy$ 关于 x (视 y 为常数):

$$u = \int 6xy dx = 3x^2y + g(y),$$

其中 $g(y)$ 是积分常数 (依赖于 y) .

$$\text{代入 } \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2:$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + g(y)) = 3x^2 + g'(y) = 3x^2 - 3y^2,$$

所以 $g'(y) = -3y^2$, 积分得 $g(y) = -y^3 + C$, 其中 C 为实常数.

故:

$$u = 3x^2y - y^3 + C.$$

注 本题整体难度不小, 一是在于计算量, 二是在于敢不敢算——题目中只给出了一个式子, 为了方便处理需要对式子整体分别对 x 和 y 求偏导, 三是在于能不能适时地利用 C-R 方程对其中的元素进行转换.

例题 2.4 (2021 年 A 卷) 若 $f(z) = u+iv$ 是区域 D 的解析函数, 则 $v+iu$ 在区域 D 内不一定是(填一定是或不一定是) 解析函数.

解 $f(z)$ 是解析函数, 故其满足 $C-R$ 方程, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

若 $g(z)$ 解析, 则其实部 v 与 u 需要满足柯西-黎曼方程, 则

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

以函数 $f(z)$ 的 $C-R$ 方程为条件, 探究在什么条件下 $g(z)$ 也满足 $C-R$ 方程:

$$1) \text{ 第一个方程: 将 } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ 代入 } \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \text{ 得 } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$2) \text{ 第二个方程: 类似地, 得到 } \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

故 v 是常数. 类似地, 得到 u 也为常数.

综上可得, 当且仅当 u 与 v 均为常数时, 函数 $g(z)$ 才满足 $C-R$ 方程, 从而解析, 即函数 $g(z)$ 不一定是解析函数.

注 本题的关键在于把函数解析这一条件转换为其实部与虚部满足柯西-黎曼方程, 再用于判断第二个函数是否或在什么条件下满足柯西-黎曼方程.

例题 2.5 (2019 年 A 题) $f(z) = x^3 - y^3 + 2x^2y^2i$ 在 $z = \frac{3}{4} + i\frac{3}{4}$ 处的导数值为 $\frac{27}{16}(1+i)$.

解 题目中没有给出函数在该点可导的条件, 但易于验证的且函数恰好在该点可导.

求解函数在一点的导数值, 只需利用公式带入即可

$$\begin{aligned} f(z)' &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial(x^3 - y^3)}{\partial x} + i \frac{\partial(2x^2y^2)}{\partial x} \\ &= 3x^2 + 4ix^2y \end{aligned}$$

带入点 $z_0 = \frac{3}{4} + i\frac{3}{4}$ 得

$$f'(z_0) = \frac{27}{16}(1 + i)$$

下面的一些题目可以作以练习.

 **练习 2.1** (2022 年秋) 设 $f(z) = u + iv$ 为解析函数, 且 $v_y - v_x = 0$, 求 $f(z)$

 **练习 2.2** (2024 年秋) 若 $f(z) = u(x, y) + i[x^2 + \alpha(y)]$ 解析, 且 $f(z) = f'(z) = 0$, 求实函数 $u(x, y), \alpha(y)$

 **练习 2.3** (2024 年秋) 已知 $f(z) = e^{-x} \cos y + iv(x, y)$ 解析, 则 $f'(z) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2.2.3 函数可导与解析的判别

方法分析

判别函数是否可导或解析主要有以下三种方式

1. 利用可导与解析的定义
2. 利用可导或解析函数经四则运算或复合后仍然解析的性质
3. 利用函数可导与解析的充要条件

具体的可以参见学习指南第二章内容提要的“二、判断函数可导与解析的方法”.

在题目的解答中, 应当根据函数的具体特点选择适当的方式进行判别, 而并不应当一股脑地使用充要条件.

真题演练

往年考试中, 该点考察的并不频繁, 只需掌握基本的判断方法和典型例子即可.

例题 2.6 (2015 年期中) 对函数 $f(z) = x + 3yi$, 下面说法正确的是 (C).

- A. 在复平面内是连续和解析的;
- B. 在复平面内是连续和可导的;
- C. 在复平面内是连续但不解析的;
- D. 在复平面内是不连续的;

解 显然, 题中的函数是连续的. 证明其不可导 (不解析) 可以从定义出发, 也可以从可导

的充要条件出发. 从定义出发, 主要是证明 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ 沿着不同的方向趋向于 0 时, $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ 的极限值不同, 从而极限不存在, 即不可导. 具体过程参见课本第二章例 2. 从充要条件出发, 在本题就是验证函数是否满足柯西-黎曼方程. 由 $\frac{\partial(x)}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial(3y)}{\partial y}$ 知其不可导.

2.2.4 初等函数性质及计算

方法分析

这类题型考察初等函数, 包括指数函数、对数函数、幂函数、三角函数与双曲函数、反三角函数与反双曲函数的定义、性质及简单的计算.

1. 定义与性质

对于考察这类知识的题型, 要注意在复数范围内特有的性质, 即在实数范围内不成立(成立)而在复数范围内成立(不成立). 基本的定义与性质在主要内容中初等函数(点击可跳转)的部分都已经涉及, 不再重复. 一些易错的有:

1) e^z 的周期性

e^z 以 $2\pi i$ 为周期, 使得 $\cos z$ 与 $\sin z$ 以 2π 为周期, $\operatorname{ch} z$ 与 $\operatorname{sh} z$ 以 $2\pi i$ 为周期.

2) $\operatorname{Ln} z$ 的多值性与计算公式

复数域内 $\operatorname{Ln} z$ 具有多值性, 同时

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z, \quad \operatorname{Ln} z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z$$

不再成立.

下面加以证明.

设 $z = re^{i\theta}$, 则 $z^n = r^n e^{in\theta}$, 故

$$\operatorname{Ln} z^n = n \ln |r| + i(n\theta + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

而

$$n \operatorname{Ln} z = n \ln |r| + in(\theta + 2k\pi)$$

很显然, 两个数虚部的值不同.

对于 $\operatorname{Ln} z^n$, 它的虚部取

$$n\theta, n\theta \pm 2k\pi, n\theta \pm 4k\pi, \dots$$

对于 $\ln z$, 它的虚部取

$$n\theta, n\theta \pm 2nk\pi, n\theta \pm 4nk\pi, \dots$$

类似地, 可以证得 $\operatorname{Ln} z^{\frac{1}{n}} \neq \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z$

3) $\operatorname{Ln} z$ 与 $\ln z$ 的区别

$\operatorname{Ln} z$ 与 $\ln z$ 的区别主要在于 $\ln z$ 的复数部分取的是 z 的辐角主值, 而由于 $\arg z_1 + \arg z_2 = \arg(z_1 z_2)$

不一定成立, 故 $\operatorname{Ln} z$ 的运算规则 $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$ 对于其主值 $\ln z$ 是不成立的.

4) $\cos z$ 与 $\sin z$ 的模长

复数范围内, $\cos z$ 与 $\sin z$ 的模长不再有界.

2. 计算

下面给出计算的重点与注意事项:

(a). 计算方法

I. 指数函数

指数函数的计算只需分清其实部与虚部即可, 即

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

需要关注指数函数的周期性, 这意味着对于任意一个复数 w 都有无数个 z , 使得 $e^z = w$, 这在解关于 e^z 的方程时需要格外注意.

II. 对数函数

1) 根据 $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ 计算 z 的模长与辐角即可.

2) 需要注意 $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 的多值性.

3) 不要使用 $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z, \operatorname{Ln} z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z$, 但是加法定理 $\operatorname{Ln} z_1 z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ 仍然成立.

4) 如需计算其主值 $\ln z$, 则要注意 z 辐角主值的范围, 即 $-\pi < \arg z \leq \pi$, 对于主值, 加法定理不再成立.

III. 乘幂

乘幂 z^w 的计算是通过先计算对数, 再利用指数得出结果.

利用 $z^w = \exp(w \operatorname{Ln} z)$ 将其转换为指数的计算, 先计算出 $\operatorname{Ln} z$, 再利用 $\exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 得出结果.

(b). 易错点

I. 多值性

多值性的错误有两种可能性:

1) 原本在实数范围内的单值函数变为了多值函数, 主要是对数和乘幂;

2) 原本在实数范围内只有一个原象的象在复数范围内有多个原象, 比如由于

e^z 的周期性, 它的任意一个象都有无穷多的原象.

II. 辐角选取

需要根据实部与虚部的值确定象限.

III. 模的计算

公式 $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 应用错误.

真题演练

往年对于性质的考察相对简单, 掌握好基本知识即可. 下面是考察性质的相关往年题.

例题 2.7 (2021 年 8 月重修班) 当且仅当 $z = 0$ 时, $e^z = 1$ (错) (填对或错).

解 在实数域内, 方程 $e^x = 1$ 有唯一解 $x = 0$. 但在复数域内, 由于复变函数 e^z 的周期性, $z = 2k\pi i (k \in \mathbb{Z})$ 都是方程的解, 因而答案是“错”.

例题 2.8 (2022 年 6 月 A 卷) 以下说法错误的是 (A)

- A. $\ln z_1 + \ln z_2 = \ln z_1 z_2$
- B. $\sin z = 0$ 的解为 $z = k\pi$ (k 为整数)
- C. $\cos 2z = 2\cos^2 z - 1$
- D. $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$

解 由前述知, $\operatorname{Ln} z$ 的运算规则 $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$, $\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$ 对于其主值 $\ln z$ 是不成立的, 故 A 错误. BCD 的正确是容易验证的.

对于 D 选项, 类似地可以验证 $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$ 和 $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$ (见课本第二章课后第 11 题).

例题 2.9 (2015 期中) 设 $f(z) = \cos z$, 则以下命题正确的是 (D)

- A. $|f(z)|$ 是有界的
- B. $f(z)$ 以 π 为周期
- C. $\cos z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$
- D. $f(z)$ 在复平面上处处解析

解 对于 A 选项, 当 $z = iy$ 为纯虚数时, $\cos z = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$. 当 $y \rightarrow \infty$ 时, $|\cos z| \rightarrow \infty$, 故错误. B, C 项的错误是显然的, 故 D 是正确的.

往年的计算类题目主要是以对数、乘幂的值或模的计算为主, 在 2024 年出现了解方程类型的题目, 但总的来说, 只要掌握基本计算方法, 熟悉函数性质, 这些题目都可轻松解答.

例题 2.10 (2022 年 6 月 A 卷/2019 年 A 卷) i^{1+i} 的模是 $e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$.

解 根据前述的方法进行计算

$$\begin{aligned} i^{1+i} &= \exp[(1+i)\operatorname{Ln} i] \\ &= \exp[(1+i)\left(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\right)] \\ &= \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] \end{aligned}$$

而由于 $|\exp(x+iy)| = e^x$, 故 i^{1+i} 的模是 $e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$.

例题 2.11 (2020 年 B 卷) $(4+3i)^i = \underline{e^{-(\arctan \frac{3}{4}+2k\pi)}(\cos(\ln 5) + i \sin(\ln 5))}.$

解 根据前述的方法进行计算

$$\begin{aligned} (4+3i)^i &= \exp[i\operatorname{Ln}(4+3i)] \\ &= \exp[i(\ln 5 + i(\arctan \frac{3}{4} + 2k\pi))] \\ &= \exp[-(\arctan \frac{3}{4} + 2k\pi) + i \ln 5] \\ &= e^{-(\arctan \frac{3}{4}+2k\pi)}(\cos(\ln 5) + i \sin(\ln 5)) \end{aligned}$$

例题 2.12 方程 $ie^z + 1 + i = 0$ 的解为 $\underline{\ln 2 + i(2k\pi - \frac{\pi}{4})}.$

解 移项可得

$$\begin{aligned} e^z &= \frac{1+i}{i} = 1-i \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \end{aligned}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ 是一个在第四象限, 故辐角主值为 $-\frac{\pi}{4}$ 的单位复数, 故方程有一个解 $z = \ln 2 - \frac{\pi}{4}i$.

另一方面, 函数 e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数, 故 $\ln 2 + i(2k\pi - \frac{\pi}{4})$ 即为方程的所有解.

剩下两道题目读者可自行计算.

 **练习 2.4** (2021 年 A 卷) $\ln(\sqrt{3}-i)$

 **练习 2.5** (2015 年期中) $1^{1+i} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2.3 习题补充

1. 如果 $f(z) = u + iv$ 是 z 的解析函数, 那么

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2 = |f'(z)|^2$$

2. 柯西-黎曼方程的极坐标形式是:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

3. 设 $f = u + iv$ 在区域 D 内是解析的. 如果 $f(z)$ 满足下面的条件之一, 那么 $f(z)$ 在整个 D 内是个常数.

- 1) $f(z)$ 恒取实值 (或虚值);
- 2) u (或 v) 是实常数;
- 3) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析;
- 4) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数;
- 5) $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数;
- 6) $au + bv = c$, 其中 a, b, c 为不全为零的常数.

4. 三角函数与双曲函数

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{ch}^2 y \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

5. 判断函数解析的方法

- 1) $f(z) = \bar{z}z^n$ (n 为大于 1 的正整数);
- 2) $f(z) = \frac{x+2y}{x^2+y^2} + i \frac{2x-y}{x^2+y^2}$

解

- 1) 类似于一元实变函数, 反证法证明: 一个可导 (解析) 函数 $\varphi(z)$ 与不可导 (不解析) 函数 $\psi(z)$ 的乘积 $f(z)$ 在 $\varphi(z) \neq 0$ 处必不可导 (不解析)。所以, 在 $z \neq 0$ 处, $f(z) = \bar{z}z^n$ 处处不可导 (不解析)。在 $z = 0$ 处, 由于

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}z^n - 0}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z}z^{n-1} = 0,$$

因此, $f(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$, 但在复平面内无处解析。

- 2) 由于

$$f(z) = \frac{(x-iy) + 2i(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{(1+2i)\bar{z}}{\bar{z}z} = \frac{1+2i}{z},$$

所以除 $z = 0$ 外 $f(z)$ 处处可导, 处处解析, 并且

$$f'(z) = -\frac{1+2i}{z^2} \quad (z \neq 0).$$



笔记 考点解析中的函数与解析的判别中提到了判断函数解析的三种方法, 虽然我们最常用 C-R 方程作以判断, 但也应当依据函数的具体结构来决定具体采用什么方法, 本题就给出了两个很好的例子。

第3章 复变函数的积分

3.1 主要内容

3.1.1 复变函数积分的定义与性质

1. 积分的定义

定义 3.1

设函数 $w = f(z)$ 定义在区域 D 内, C 为区域 D 内, C 为区域 D 内起点为 A 终点为 B 的一条光滑的有向曲线. 把曲线 C 任意分成 n 个弧段, 设分点为

$$A = z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_{n-1}, z_n = B$$

在每个弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ ($k = 1, 2, \cdots, n$) 上任取一点 ζ_k , 并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k$$

记 $\Delta s_k = \widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度 $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta s_k\}$. 当 $n \rightarrow \infty$ 且 $\delta \rightarrow 0$ 时, 如果不论对 C 的分法及 ζ_k 的取法如何, S_n 有唯一极限, 那么称极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分. 记作

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k$$

如果 C 为闭曲线, 则沿着闭曲线的积分记作

$$\oint_C f(z)dz$$



2. 积分的存在条件与计算方法

(a). 化为两个二元实变函数的第二类线积分

由

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) \quad (3.1)$$

$$= \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy \quad (3.2)$$

可知

1) $f(z)$ 为连续函数 + C 为光滑曲线 $\Rightarrow$ 积分 $\int_C f(z)dz$ 一定存在.

2) $\int_C f(z)dz$ 可以转换为两个二元实变函数的线积分.

(b). 利用参数方程计算

设曲线 C 的参数方程 $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, 那么

$$\int_C f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt \quad (3.3)$$

(c). 重要积分

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

3. 积分的性质

- 1) (方向改变, 积分变号) $\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$
- 2) (线性性质) $\int_C kf(z)dz = k \int_C f(z)dz$ (k 为常数)
- 3) (对积分路径的可加性)

若 C 由 C_1 与 C_2 连接而成, 则

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

4) (不等式性质)

曲线 C 的长度为 L , 函数 $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \leq M$, 那么

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)|ds \leq ML \quad (3.5)$$

3.1.2 柯西-古萨基本定理及其推广

1. 柯西-古萨 (Cauchy-Goursat) 基本定理

定理 3.1 (柯西-古萨基本定理)

函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析 $\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 0$, 其中 C 为 B 内的任意一条封闭曲线.

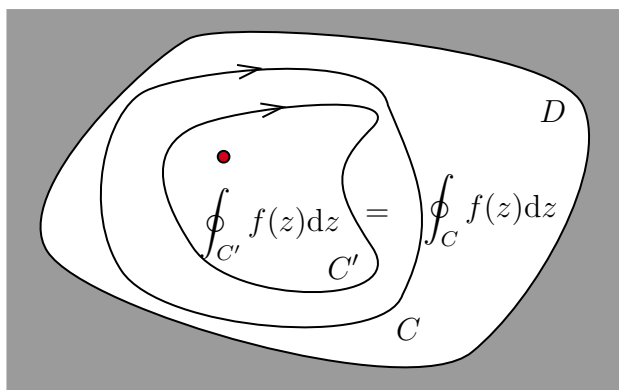


注

- 1) 定理中的 C 可以不是简单闭合曲线.
- 2) 定理中条件可以放宽为: 当 C 为区域 B 的边界时, 如果 $f(z)$ 在闭区域 $\bar{B} = B + C$ 上解析或在 B 内解析, 在闭区域 $\bar{B}$ 上连续, 则 $\oint_C f(z)dz = 0$ 仍然成立.

2. 闭路变形原理

闭合曲线 C 连续改变且不经过不解析的点, 则 $\oint_C f(z)dz$ 的值不变.



3. 复合闭路定理

定理 3.2 (复合闭路定理)

设 C 为多连通域 D 内的一条简单闭合曲线, $C_1, C_2, \dots, C_n$ 是在 C 内部的简单闭合曲线, 它们互不包含也互不相交, 并且以 $C, C_1, C_2, \dots, C_n$ 为边界的区域全包含于 D . 如果 $f(z)$ 在 D 内解析, 则

1)

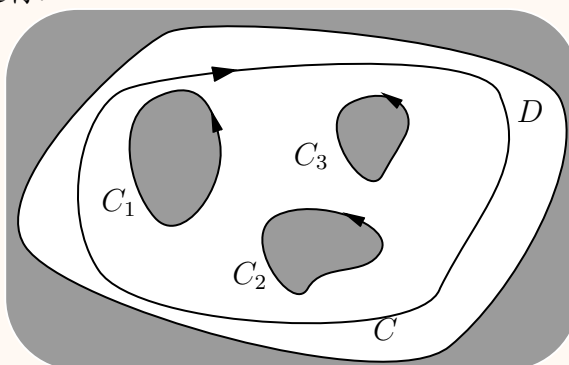
$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz,$$

其中 C 及 C_k 均沿正向.

2)

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0,$$

其中 Γ 是由 C 及 $C_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 所组成的复合闭路, C 按逆时针进行, C_k 按顺时针进行.



注 关于复合闭路的方向.

一般地, 闭曲线的正方向可以用这样一个口诀来判断——“人在线上走, 区域在左手”, 意思是当在闭合曲线上以正方向绕行时, 闭合曲线所围成的区域应当在左手边.

需要注意的是, 当闭合曲线作为区域的边界也分两种情况, 一种是作为外边界, 一

种是作为内边界.

对于外边界, 它的内部 (起码部分) 属于该区域, 对应着定理中的曲线 C . 对这样的边界应用上述的口诀, 就会得到逆时针是它的正方向.

对于内边界, 该区域都在它的外部, 它的内部不属于该区域, 对应着定理中的曲线 $C_k (k = 1, 2, \dots, n)$. 如果沿着逆时针绕行 C_k , 就会发现区域在右手边, 这就不符合口诀. 因而对于内边界, 顺时针是它的正方向.

所以, 对于复合闭路 Γ , 它的正向就意味着不管沿着外曲线还是内曲线, 区域都在左手边, 即外逆内顺.

3.1.3 积分的计算

1. 原函数与不定积分

(a). 积分与路径无关

定理 3.3 (积分与路径无关的条件)

函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析 $\Rightarrow$ 积分 $\int_C f(z)dz$ 与连接起点与终点的路线 C 无关. 只与起点 z_0 与终点 z_1 有关.



(b). 原函数的定义

定义 3.2 (原函数)

如果函数 $\varphi(z)$ 在区域 B 的导数等于 $f(z)$, 即 $\varphi'(z) = f(z)$, 那么 $\varphi(z)$ 称为 $f(z)$ 在区域 B 内的原函数.



(c). 原函数的形式及其解析性

定理 3.4 (原函数的形式及其解析性)

如果 $f(z)$ 在单连通域 B 内解析, 设函数 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$, 其中 z_0 为 B 内的一个固定的点, $z \in B$, 则函数 $F(z)$ 必为 B 内的一个解析函数, 且 $F'(z) = f(z)$.



注

- 1) 定理 3.4 表明, 函数 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.
- 2) 函数 $f(z)$ 的任意两个原函数相差一个复常数. 将函数 $f(z)$ 的原函数的一般表达式 $F(z) + c$ 称为 $f(z)$ 的不定积分, 记作

$$\int f(z)dz = F(z) + c$$

(d). 利用原函数计算积分

定理 3.5 (利用原函数计算积分)

函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内解析, $G(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数, 则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = G(z_1) - G(z_0) \quad (3.6)$$

其中, z_0 与 z_1 为域 B 内两点.



2. 柯西积分公式

定理 3.6 (柯西积分公式)

如果 $f(z)$ 在区域 D 解析, C 为 D 内任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于 D , z_0 为 C 内一点, 那么

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (3.7)$$

**注**

- 1) 如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域内及 C 上解析, 那么公式 (3.7) 仍然成立.
- 2) 公式 (3.7) 表明, 解析函数在 C 内部任一点的值都可以用它在边界上的值表示.
- 3) 如果 C 为圆周 $z = z_0 + Re^{i\theta}$, 那么式 (3.7) 就变为

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta \quad (3.8)$$

说明, 一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

3. 解析函数的高阶导数

(a). 高阶导数的求法与解析性

定理 3.7 (高阶导数公式)

解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数, 它的 n 阶导数为:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.9)$$

其中 C 为在函数 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线, 而且它的内部全含于 D .



高阶导数公式的作用不在于通过积分来求导, 而在于通过求导来求积分.

(b). 柯西不等式

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $z_0 \in D$, 圆周 $C_r: |\zeta - z_0| = r$ 及其内部全部含于 D , 则

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M(r)}{r^n}$$

其中 $M(r) = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$.

(c). 刘维尔 (Liouville) 定理

定理 3.8 (刘维尔定理)

若 $f(z)$ 在复平面上解析且有界, 则 $f(z)$ 必恒为常数.



(d). Morera 定理

定理 3.9 (Morera 定理)

设函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内连续, 且对于 B 内任何一条简单闭曲线 C 都有 $\oint_C f(z)dz = 0$, 则 $f(z)$ 在 B 内解析.



3.1.4 解析函数与调和函数

1. 解析函数和调和函数的关系

(a). 调和函数的定义

定义 3.3 (调和函数)

如果二元实变函数 $\varphi(x, y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数并且满足拉普拉斯 (Laplace) 方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.10)$$

那么称 $\varphi(x, y)$ 为区域 D 内的调和函数.



(b). 解析函数与调和函数的关系

定理 3.10 (解析函数与调和函数的关系)

任何在区域 D 内解析的函数, 它的实部和虚部都是 D 内的调和函数.



注 解析函数 $f(z) = u + iv$ 的实部与虚部的任意阶导数都是调和函数.

(c). 共轭调和函数

定义 3.4 (共轭调和函数)

设 $u(x, y)$ 为区域 D 内给定的调和函数, 把使 $u + iv$ 在 D 内构成解析函数的调和函数 $v(x, y)$ 称为 $u(x, y)$ 的共轭调和函数. 也就是说, u 和 v 在 D 内满足柯西-黎曼方程.



注

1) u 和 v 的地位不可调换. v 是 u 的共轭调和函数不能称为也不代表 u 为 v 的共轭

调和函数. 事实上, 当且仅当 u, v 均为常数时, 虚部与实部互换仍为解析函数.

2) 定理3.10表明, 解析函数的虚部为实部的共轭调和函数.

2. 解析函数的求法

(a). 偏积分法

如果已知一个调和函数 u , 就可以利用柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

通过偏积分, 求得它的共轭调和函数 v , 即

$$v(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + C(x)$$

再利用 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ 求出 $C(x)$. 反之, 也可以通过已知的 v 求出 u .

(b). 不定积分法

设解析函数 $f(z) = u + iv$.

如果已知实部 u , 求虚部 v , 可以由式 (2.3) 可知

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y$$

把 $u_x - iu_y$ 还原成以 z 表示的函数, 得到

$$f'(z) = u_x + iu_y = U(z)$$

再积分就有

$$f(z) = \int U(z) dz + c = \int u_x + iu_y dz + c$$

从而得到 $f(z)$, 可以求得虚部.

类似地, 如果已知虚部 v , 求实部 u , 就可以通过

$$f(z) = \int V(z) dz + c = \int v_y + iv_x dz + c$$

(c). 线积分法

设 u 为区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部. 由于 u 满足 Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$, 故 $(-u_y)_y = (u_x)_x$, 从而得到 $-u_y dx + u_x dy$ 必是某个二元函数 v 的全微分, 即

$$dv = -u_y dx + u_x dy = v_x dx + v_y dy$$

于是有 $u_x = v_y, v_x = -u_y$, 即 u, v 满足柯西-黎曼方程, 从而 $u + iv$ 为一解析函数, 而

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy + C$$

其中 C 为常数, (x_0, y_0) 为 D 内一点.

类似地, 如果已知虚部 v , 则可以通过

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_y dx - v_x dy + x$$

来求实部 u .

3.2 考点解析

3.2.1 积分的计算

方法分析

积分的计算是复变函数的重点, 下面将以被积函数 $f(z)$ 是否解析与积分路径 C 是否封闭作为标准, 区分什么情况下应当使用什么方法.

1. $f(z)$ 不解析

当 $f(z)$ 不解析时, 不论积分路径 C 是否封闭, 积分的计算都只能采用由公式 (3.1) 与公式 (3.3) 给出的两种基本计算方法, 即将复变函数的积分化为二元实变函数的线积分或利用参数方程化为定积分.

2. $f(z)$ 解析且 C 不封闭

如果 $f(z)$ 在某单连通域内解析, 则在其解析域上积分的值与路径无关, 因而可设法求出被积函数的原函数, 再利用公式 (3.6) 计算.

计算原函数时一般可以使用换元法与分部积分法, 一些需要满足的条件也在此简单说明.

1) 换元法

设 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析, $f'(z) \neq 0$, 并且它将 D 内的光滑曲线 C 映射为 w 平面上区域 D^* 内的光滑曲线 Γ . 若 $\Phi(w)$ 为连续函数, 则有

$$\int_{\Gamma} \Phi(w) dw = \int_C \Phi[f(z)] f'(z) dz$$

若 $\Phi(z)$ 为解析函数, 并且 D 和 D^* 都是单连通域, 则

$$\int_{w_1}^{w_2} \Phi(w) dw = \int_{z_1}^{z_2} \Phi[f(z)] f'(z) dz$$

其中 $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$.

2) 分部积分法

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在单连通域 B 内解析, z_1, z_2 为 B 内两点, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) g'(z) dz = [f(z) g(z)]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} g(z) f'(z) dz$$

如果原函数不方便求解, 也可以使用两种基本计算方法计算.

3. $f(z)$ 解析 (或有有限个奇点) 且 C 为封闭曲线

当 $f(z)$ 解析 (或有有限个奇点) 且 C 为闭曲线时, 常考虑以柯西积分公式 (定理3.6) 与高阶导数公式 (定理3.7) 为主要工具, 联合柯西-古萨基本定理 (定理3.1)、复合闭路定理 (定理3.2)、闭路变形原理, 并将函数作适当变形 (代数变换), 将函数 $f(z)$ 化为且 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$.

结合柯西积分公式与高阶导数公式, 可以得到:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.11)$$

当 $n=0$, 它就是柯西积分公式; 当 $n=1, 2, \dots$, 就是高阶导数公式. 在使用时, 需要注意:

- 1) 要注意公式成立的条件, 即在 C 所围成的区域内 $f(z)$ 解析, 这成立的一个必要条件就是函数 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 在 C 内有且只有 z_0 一个奇点.
- 2) 公式常常与柯西-古萨定理、复合闭路定理、闭路变形原理等一起使用, 譬如, 当被积函数在闭曲线内部有多个奇点时, 就需要结合复合闭路定理.

这些都将在例题中进一步解释.

如果函数被积函数在 C 内有有限个甚至无限个奇点, 而它不能化为 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$, 则以上方法均不适用, 只能利用第五章留数的相关方法.

真题演练

在往年的考试中, 积分的计算主要有两种考察方式.

一种是考察对其理论依据的理解, 即对柯西-古萨基本定理、复合闭路定理、闭路变形原理、柯西积分公式、高阶导数公式本身的理解, 譬如 2022 年秋的最后题就是“用留数定理证明高阶导数公式”, 或下面的例题3.1. 由于这一种题型并不常见, 故合并在此类题型种. 准备这一类题型, 应当多加留意定理本身的内容和证明方式.

例题 3.1 (2019 年春) 设 C 为复平面内的正向简单闭曲线, $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 C 及其内部解析, 且在 C 上有 $f(z) = g(z)$, 证明: 在 C 的内部, 必有 $f(z) = g(z)$.

解 定义函数 $h(z) = f(z) - g(z)$. 由于 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 C 及其内部解析, 因此 $h(z)$ 也在 C 及其内部解析. 特别地, $h(z)$ 在 D 内解析, 在闭区域 $\bar{D} = D \cup C$ 上连续, 且在 C 上 $h(z) = 0$. 任取 $z_0 \in D$. 由柯西积分公式, 有:

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{h(z)}{z-z_0} dz.$$

由于在 C 上 $h(z) = 0$, 因此被积函数 $\frac{h(z)}{z-z_0} = 0$ 对所有 $z \in C$ 成立. 故积分:

$$\oint_C \frac{h(z)}{z-z_0} dz = 0,$$

从而 $h(z_0) = 0$.

由于 z_0 是 D 内任意一点, 因此 $h(z) = 0$ 在 D 内处处成立, 即 $f(z) = g(z)$ 在 C 的内部 D 内成立.

第二种考察形式就是积分的计算, 正如前面方法分析中所写的, 根据函数与积分路径的特点可以选择多种的计算方法. 虽然考试中积分的计算大多通过留数定理及其引用, 但也有专门考察本章中的相关计算方法, 同时灵活运用本章中的计算方法也能更好地应对题目.

下面, 我们先给出两道非封闭曲线积分的例题.

例题 3.2 (2024 年秋) 设 C 为单位圆左半圆从 $-i$ 顺时针到 i 的曲线, 则 $\int_C |z| dz$.

分析 积分路径 C 并不是一个封闭曲线, 故只能考虑基本计算方法或原函数. 由题目中的 C 为单位圆的一部分可知在 C 上 $|z| = 1$, 即被积函数是一个常数. 常数在复平面上是解析的, 因而可以采用原函数法. 解答中将两种方法都给出以供参考.

解 方法一: 利用积分与路径无关

显然, 常数函数 $f(z) = k$ 是在复平面内解析的函数, 因而它的积分与路径无关, 且其原函数为 $\int k dz = kz + c$. 因而,

$$\begin{aligned}\int_C |z| dz &= \int_C 1 dz \\ &= \int_{-i}^i 1 dz \\ &= (z) \Big|_{-i}^i \\ &= 2i\end{aligned}$$

方法二: 利用参数方程

单位圆左半圆从 $-i$ 顺时针到 i 的曲线可以写为 $z = -\sin t - i \cos t (0 \leq t \leq \pi)$ 的参数方程, 带入积分就有

$$\begin{aligned}\int_C |z| dz &= \int_C 1 dz \\ &= \int_0^\pi d(-\sin t - i \cos t) \\ &= \int_0^\pi -\cos t + i \sin t dt \\ &= 2i\end{aligned}$$

例题 3.3 (2019 年春) $\int_1^{1+i} z^2 e^z dz$

解 $z^2 e^z$ 是两个在复平面上解析的函数的乘积, 故它在复平面上也是解析的, 因而可以考虑原函数法. 在一元函数中, 处理形如 $x^n e^x$ 被积函数一般采用分部积分法, 这里是类似的. 先求被

积函数的原函数

$$\begin{aligned}
 \int z^2 e^z dz &= \int z^2 de^z \\
 &= z^2 e^z - 2 \int z e^z dz \\
 &= z^2 e^z - 2ze^z + \int e^z dz \\
 &= z^2 e^z - 2ze^z + e^z + C
 \end{aligned}$$

再利用求出的原函数计算积分

$$\begin{aligned}
 \int_1^{1+i} z^2 e^z dz &= (z^2 e^z - 2ze^z + e^z) \Big|_1^{1+i} \\
 &= -e
 \end{aligned}$$

下面给出两道练习题，一道是通过基本计算方法计算不解析函数积分的值，一道是通过原函数计算积分的值。

 **练习 3.1** (2018 年春) 沿 $y = x^3$, 积分 $\int_0^1 z \sin z dz$ 的值为_____.

 **练习 3.2** $\int_C e^{|z|^2} \operatorname{Im}(z) dz$, 其中 C 为从 $z_1 = 0$ 到 $z_2 = 1 + i$ 的直线段.

下面是一组有关封闭曲线积分计算的题目.

例题 3.4 (2022 年秋) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left[\frac{\sin(z \cos z)}{z-2} - \frac{\ln(1+z)}{z} \right] dz$

分析 使用柯西积分公式与高阶导数公式处理积分时, 最重要的就是关注闭曲线 C 内函数的解析情况. 本题中的闭曲线 C 是一个圆心在原点, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆. 函数 $\frac{\sin(z \cos z)}{z-2}$ 只有一个奇点 $z = \frac{1}{2}$, 所以在这个圆内及其边界上它是解析的, 故根据柯西-古萨定理, 它的积分值为 0; 函数 $\ln(1+z)$ 在圆内及其边界上解析的, 因而 $\frac{\ln(1+z)}{z}$ 在 $z=0$ 满足 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 的形式, 可以使用公式 (3.11) 计算积分值.

解 首先, 计算 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin(z \cos z)}{z-2} dz$. 由于函数 $\frac{\sin(z \cos z)}{z-2}$ 是由在复平面内解析的函数 $\cos z, \sin z, z, z-2$ 运算与复合而来, 故其在除点 $z=2$ 以外的复平面上解析, 因而在圆周 $|z| = \frac{1}{2}$ 上及其内部解析, 满足柯西-古萨定理的条件, 所以

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin(z \cos z)}{z-2} dz = 0$$

然后, 计算 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+z)}{z} dz$. 函数 $\ln(1+z)$ 在除了实轴上 $z \leq -1$ 以外的复平面上解析的函数, 因而在圆周 $|z| = \frac{1}{2}$ 内部及其边界上解析, 从而可以使用公式 (3.11) 计算, 即

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+z)}{z} dz = \ln(1+z) \Big|_{z=0} = 0$$

综上,

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left[\frac{\sin(z \cos z)}{z-2} - \frac{\ln(1+z)}{z} \right] dz = 0$$

例题 3.5 求积分 $I = \oint_{|z|=r} \frac{\sin z}{z^2(z^2-z-2)}$ 的值, 其中 $r \neq 1, 2$.

分析 本题需要分情况讨论. 由于被积函数在 $z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = 2$ 三处不解析, 故当 $0 < r < 1, 1 < r < 2$ 与 $r > 2$ 时, 积分路径内被积函数的解析情况就不一样, 因而应当分为这三种情况求积分的值. 当 $0 < r < 1$ 时, $|z| = r$ 内只有一个奇点, 直接应用高阶导数公式就可以求得积分的值; 当 $1 < r < 2$ 时, $|z| = r$ 内有两个奇点, 故需要先通过复合闭路定理处理, 再利用柯西积分公式计算; 当 $r > 2$ 时, 处理方法是类似的.

解 根据上述分析, 依据 r 值得不同, 我们分三种情况求解.

1. 当 $0 < r < 1$ 时, 取 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - z - 2}$ 在 $|z| = r$ 及其内部解析, 则

$$I = \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^2} dz = 2\pi i f'(0)$$

而

$$f'(z) = \frac{(z^2 - z - 2) \cos z - (2z - 1) \sin z}{(z^2 - z - 2)^2} \quad f'(0) = -\frac{1}{2}$$

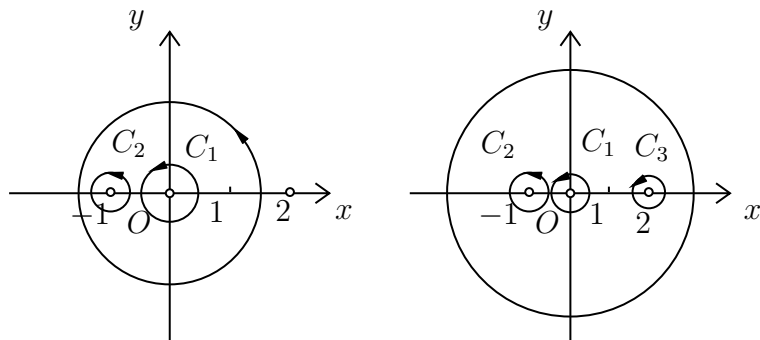
故 $I = -\pi i$

2. 当 $1 < r < 2$ 时, 在圆周 $C: |z| = r$ 内以 $z_0 = 0$ 和 $z_1 = -1$ 为圆心作两个小圆周, 使其不互相交且互不包含, 则根据复合闭路定理有

$$\begin{aligned} I &= \oint_{C_1} \frac{\sin z}{z^2(z^2 - z - 2)} + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{z^2(z^2 - z - 2)} \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

由 1 知, $I_1 = -\frac{1}{2}$, 而由于 $z^2 - z - 2 = (z+1)(z-2)$, 故取 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-2)}$ 在 C_2 内解析, 则

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-2} dz \\ &= 2\pi i f(-1) = \frac{2}{3}\pi i \sin 1 \end{aligned}$$



所以, $I = \frac{2}{3}\pi i \sin 1 - \pi i$

3. 当 $r > 2$ 时, 在圆周 $C: |z| = r$ 内作三个圆周 C_1, C_2, C_3 , 使它们互不相交且互不包含, 类似可得

$$\begin{aligned} I &= \oint_{C_1} \frac{\sin z}{z^2(z^2 - z - 2)} dz + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{z^2(z^2 - z - 2)} dz + \oint_{C_3} \frac{\sin z}{z^2(z^2 - z - 2)} dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

其中 $I_1 + I_2 = \left(\frac{2}{3}\sin 1 - 1\right)\pi i$. 在 I_3 中取 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z+1)}$, 得

$$I_3 = \oint_{C_3} \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi i f(2) = \frac{i}{6}\pi \sin 2,$$

所以, $I = \left(\frac{2}{3}\sin 1 - 1 + \frac{1}{6}\sin 2\right)\pi i$.

注 这是一道非常典型的公式 (3.11) 与复合闭路定理联合使用, 同时还需要对被积函数作代数变形的题目. 应当着重注意, 在面对闭合积分路径内有多个奇点的情况时如何处理. 题中的思路是: 先通过复合闭合回路定理, 将原积分转化为多个闭曲线积分. 在这些积分路径所围成的区域内, 被积函数都有一个特点, 即只有一个在点 $z = a$, 由 $\frac{1}{(z-a)^n}$ 所导致的奇点; 然后, 再通过代数变形, 使得被积函数再积分区域内符合 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 的形式, 这里的核心是保证函数 $f(z)$ 在闭曲线内解析; 最后, 运用公式 (3.11) 去计算积分的值.

下面是一些往年的题目, 难度不大, 可以作为练手.

 **练习 3.3** (2020 年秋) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^2} dz$

 **练习 3.4** (2019 年春) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-a)^3} dz (|a| > 1)$

 **练习 3.5** (2019 年秋) $\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-\pi)^2} dz$

3.2.2 解析函数与调和函数的关系

方法分析

针对这个知识点主要有两种考察方式, 一是解析函数的关系与性质, 二是解析函数的虚部 (或实部) 的计算.

对于第一种考查方式, 要牢记

- 1) 调和函数的定义, 即满足 Laplace 方程 (3.10).
- 2) 解析函数的实部与虚部都是调和函数.
- 3) 共轭调和函数的含义, 即解析函数的虚部是实部的共轭调和函数, 它们的地位不能颠倒.

对于第二种考查方式, 要熟悉并合理使用三种计算方法

1) 偏积分法

- 方法描述: 利用柯西黎曼方程 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, 从已知的 u (或 v) 求偏导数, 再积分得到 v (或 u).
- 特点: 适用于函数表达式简单或偏导数易计算.

2) 不定积分法

- 利用解析函数的导数 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ (已知 u 时) 或 $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ (已知 v 时), 对 $f'(z)$ 积分得 $f(z)$.
- 特点: 适用于当 $f'(z)$ 能简洁表示为 z 的函数且表达式易于积分, 如果 $f'(z)$ 不是 z 的显式函数则无效.

3) 线积分法

- 方法描述: 利用公式 $v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C$ (已知 u 时), 路径需在定义域内.
- 特点: 通用性强, 但路径选择影响计算量, 且需保证路径不穿过奇点

需要注意的是, 积分出来的结果一般含有待定的常数 C , 不要忽略. C 的确定应当结合题目中的条件

真题演练

以下面的题为例, 展示三种方法的具体使用.

例题 3.6 (2019 年秋) $v(x, y) = 2xy + 3x$ 是否可以作为解析函数的虚部? 为什么? 如果能, 以 v 为虚部构造一个解析函数 $f(z)$ 且 $f(i) = 0$

分析 题目先问 v 是否可以作为解析函数的虚部, 事实上就是在问 v 满不满足 Laplace 方程, 是不是调和函数, 带入 Laplace 方程验证即可. 本题中 v 并不复杂, 我们三种方式都使用, 作以示例.

解 由于 $\frac{\partial v^2}{\partial^2 x} = -\frac{\partial v^2}{\partial^2 y} = 0$, 故 v 满足 Laplace 方程, 是调和函数, 可以作为解析函数的虚部. 下面通过三种方法求出函数的实部.

方法一: 偏积分法

由于 u, v 满足柯西-黎曼方程, 故可知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -(2y + 3) = -2y - 3.$$

对左式作偏积分有

$$u(x, y) = \int 2x dx = x^2 + g(y),$$

将 u 对 y 求偏导并带入右式有

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g'(y) = -2y - 3.$$

积分后可得

$$g(y) = \int (-2y - 3)dy = -y^2 - 3y + C,$$

其中 C 为常数. 代入得实部: $u(x, y) = x^2 - y^2 - 3y + C$. 利用 $z = x + iy$ 简化:

$$f(z) = (x^2 - y^2 + 2ixy) + (-3y + 3ix) + C = (x + iy)^2 + 3i(x + iy) + C = z^2 + 3iz + C.$$

由条件 $f(i) = 0$:

$$f(i) = (i)^2 + 3i(i) + C = -1 + 3i^2 + C = -1 - 3 + C = -4 + C = 0 \implies C = 4.$$

最终结果:

$$f(z) = z^2 + 3iz + 4.$$

方法二: 不定积分法

解析函数的导数为:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i(2y + 3).$$

将 $f'(z)$ 表示为 $z = x + iy$ 的函数:

$$2x + i(2y + 3) = 2x + 2iy + 3i = 2(x + iy) + 3i = 2z + 3i.$$

积分求 $f(z)$:

$$f(z) = \int (2z + 3i)dz = z^2 + 3iz + C.$$

由条件 $f(i) = 0$:

$$f(i) = (i)^2 + 3i(i) + C = -1 - 3 + C = -4 + C = 0 \implies C = 4.$$

最终结果:

$$f(z) = z^2 + 3iz + 4.$$

方法三: 线积分法

实部 $u(x, y)$ 由线积分给出:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy \right) + C$$

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (2x dx - (2y + 3) dy) + C$$

易验证, 积分的值与路径无关, 故可任选路径. 选择路径: 从 $(0, 0)$ 到 $(x, 0)$ (沿 x 轴), 再到 (x, y) (竖直线).

- 第一段 $((0,0)$ 到 $(x,0)$, $y=0$, $dy=0$):

$$\int_{(0,0)}^{(x,0)} (2xdx - (2y+3)dy) = \int_0^x 2xdx = [x^2]_0^x = x^2.$$

- 第二段 $((x,0)$ 到 (x,y) , x 恒定, $dx=0$):

$$\int_{(x,0)}^{(x,y)} (2xdx - (2y+3)dy) = \int_0^y -(2y+3)dy = [-y^2 - 3y]_0^y = -y^2 - 3y.$$

故 $u(x,y) = x^2 + (-y^2 - 3y) + C = x^2 - y^2 - 3y + C$. 后同方法一, 可得最终结果:

$$f(z) = z^2 + 3iz + 4.$$

 **笔记** 从上面的解答过程中可以看到, 针对本题, 不定积分的过程最为简明. 这是因为, 本题要求的是解析函数本身, 而并非实部. 从此处可以看出, 如需求解析函数本身, 可以优先考虑不定积分法, 但前提是导数可化为 z 的显式; 如需求实部 (或虚部), 则可以优先考虑偏积分法和线积分法, 此时不定积分法相对复杂.

 **练习 3.6** (2020 年秋) 求 $u = x^2 + 2xy - y^2$ 的共轭调和函数 $v(x,y)$, 满足 $v(0,0) = 1$

3.3 习题补充

1. 最大模原理

在闭区域内不恒为常数的解析函数的模的最大值只能在区域的边界上取得.

证明 由于 $f(z)$ 为 C 上及 C 内的解析函数, 故 $[f(z)]^n$ 也是 C 上及 C 内的解析函数, 对函数 $[f(z)]^n$ 利用柯西积分公式有

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{[f(\xi)]^n d\xi}{\xi - z}$$

设 M 为 $|f(\xi)|$ 在 C 上的最大值, L 为 C 的长, d 为 z 到 C 的最短距离, 则

$$\begin{aligned} |f(z)|^n &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{[f(\xi)]^n d\xi}{\xi - z} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|f(\xi)|^n}{|\xi - z|} d\xi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{M^n}{d} d\xi = \frac{M^n L}{2\pi d} \end{aligned}$$

$$|f(z)| \leq M \left(\frac{1}{2\pi d} \right)^{\frac{1}{n}}$$

在上式的右边令 $n \rightarrow +\infty$ 得 $|f(z)| \leq M$.

第4章 级数

4.1 主要内容

4.1.1 复数项级数

1. 复数项级数的极限与收敛

定义 4.1 (复数项级数的极限)

设 $\{\alpha_n\}$ 为一复数列, 其中 $\alpha_n = a_n + ib_n$, 又设 $\alpha = a + ib$ 为一确定的复数. 如果任意给定 $\varepsilon > 0$, 相应地能找到一个正数 $N(\varepsilon)$, 使 $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ 在 $n > N$ 时成立, 那么 α 称为复数列 $\{\alpha_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$$

此时也称复数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 α .



定理 4.1 (复数项级数收敛的充要条件)

复数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 α 的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$



2. 复数项级数概念

定义 4.2 (复数项级数、复数项级数收敛及发散)

设 $\{\alpha_n = a_n + ib_n\}$ 为一复数列, 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

称为无穷级数, 其最前面 n 项的和

$$s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

称为级数的部分和.

如果部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 称为收敛, 并且极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ 称

为级数的和. 如果数列 $\{s_n\}$ 不收敛, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 称为发散.



定理 4.2 (复数项级数收敛的充要条件)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛的必要条件为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 从而推出

复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

**定理 4.3**

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 也收敛, 且不等式 $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 成立.

**定义 4.3 (绝对收敛与条件收敛)**

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛, 那么称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 为绝对收敛.

非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛级数.

**定理 4.4 (复数项级数绝对收敛的充要条件)**

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛.



4.1.2 幂级数

1. 幂级数概念

定义 4.4 (复变函数项级数)

设 $\{f_n(z)\} (n = 1, 2, \dots)$ 为一复变函数序列, 其中各项在区域 D 内有定义. 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

称为复变函数项级数, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. 这级数的最前面 n 项的和

$$s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$$

称为这级数的部分和.

如果对于 D 内的某一点 z_0 , 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z_0) = s(z_0)$ 存在, 那么我们称复变函数

项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 收敛, 而 $s(z_0)$ 称为它的和. 如果级数在 D 内处处收敛, 那

么它的和一定是 z 的一个函数 $s(z)$:

$$s(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

$s(z)$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的和函数.



定义 4.5 (幂级数)

当 $f_n(z) = c_{n-1}z^{n-1}$ 时, 得到函数项级数的特殊情形.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

这种级数称为幂级数.



笔记 当 $f_n(z) = c_{n-1}(z-a)^{n-1}$ 时, 函数项级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

令 $z-a = \zeta$, 那么上式幂级数与定义中的幂级数形式相同. 为了研究方便, 仅讨论 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 这一形式的幂级数.

定理 4.5 (Abel 定理/幂级数的收敛定理)

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 (\neq 0)$ 收敛, 那么对满足 $|z| < |z_0|$ 的 z , 级数必绝对收敛. 如果在 $z = z_0$ 级数发散, 那么对满足 $|z| < |z_0|$ 的 z , 级数必发散.



2. 收敛圆和收敛半径

根据 Abel 定理, 幂级数的收敛情况无外乎以下三种:

- (a). 对所有的正实数都是收敛的. 根据 Abel 定理, 级数在复平面内处处绝对收敛.
- (b). 对所有的正实数除 $z = 0$ 外都是发散的. 级数在复平面内除原点外处处发散.
- (c). 即存在使级数收敛的正实数, 也存在使级数发散的实数. 发散与收敛的分界圆周 C_R 称为幂级数的收敛圆. 在收敛圆内部, 级数绝对收敛; 在收敛圆的外部, 级数发散.

收敛圆的半径 R 称为收敛半径. 所以幂级数的收敛范围是以原点为中心的圆域. 对收敛圆的圆周上是收敛还是发散, 需要进行具体分析.

3. 收敛半径的求法

定理 4.6 (比值法)

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lambda \neq 0$, 那么收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$.

**定理 4.7 (根值法)**

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \mu \neq 0$, 那么收敛半径 $R = \frac{1}{\mu}$.

**4. 幂级数的运算和性质****(a). 复变幂级数的有理运算**

设

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, R = r_1, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, R = r_2$$

那么以在原点为中心, 半径为 $R = \min\{r_1, r_2\}$ 的圆内, 这两个幂级数可以像多项式那样进行相加、相减、相乘, 得到的幂级数的和函数就是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积.

• 和差:

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, |z| < R$$

• 相乘:

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \dots + a_0 b_n) z^n, |z| < R$$



笔记 在各种情形, 所得到的幂级数的收敛半径大于或等于 $\min\{r_1, r_2\}$.

比如, 对于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n \quad (0 < a < 1)$$

容易验证 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n$ 的收敛半径都等于 1, 而 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} z^n$ 的收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^n}{1+a^n} / \frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}} \right| = \frac{1}{a} > 1$$

也就是说, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} z^n$ 自身的收敛圆域大于 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n$ 的公共收敛圆

域 $|z| < 1$. 但应注意, 使等式 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} z^n$ 成立的收敛圆域仍应为 $|z| < 1$, 不能扩大.

(b). 复变幂级数的代换 (复合) 运算

如果当 $|z| < r$ 时, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 又设在 $|z| < R$ 内 $f(z)$ 解析且满足 $|g(z)| < r$,

那么当 $|z| < R$ 时, $f[g(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [g(z)]^n$.

(c). 复变幂级数的性质

性质 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的收敛半径为 R , 那么

I. 它的和函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

是收敛圆: $|z-a| < R$ 内的解析函数.

II. $f(z)$ 在收敛圆内的导数可将其幂级数逐项求导得到, 即

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$$

III. $f(z)$ 在收敛圆内可以逐项积分, 即

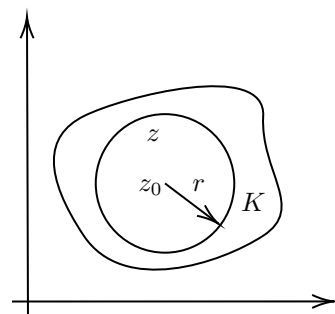
$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_C (z-a)^n dz$$

4.1.3 泰勒级数

1. 泰勒展开定理

如右图所示, 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 而 $|\zeta - z_0| = r$ 是 D 内以 z_0 为中心的任何一个圆周, 它与它内部全含于 D , 把它记作 K . 设 z 为 K 内任一点, 利用柯西积分公式, 并将函数展开为幂级数, 有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_K \left[\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right] d\zeta \end{aligned}$$



根据解析函数的高阶导数公式, 可将上式写为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + R_N(z)$$

其中

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \left[\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right] d\zeta$$

可以证明 (此处省略, 参见课本 109 页) $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(z) = 0$ 在 K 内成立, 因此

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (4.1)$$

圆周 K 的半径可以任意增大, 只要 K 在 D 内. 设 z_0 到 D 的边界上各点最短距离为 d , 那么 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式 4.1 在圆域 $|z - z_0| < d$ 内成立. 此时对于 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒级数来说, 它的收敛半径 $R \geq d$.

定理 4.8 (泰勒展开定理)

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, z_0 为 D 内的一点, d 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离, 那么当 $|z - z_0| < d$ 时,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

成立, 其中 $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), n = 0, 1, 2, \dots$



注 若 $f(z)$ 在 z_0 解析, 那么使 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式成立的圆域的半径 R 就等于从 z_0 到 $f(z)$ 的距 z_0 的最近一个奇点 α 之间的距离, 即 $R = |\alpha - z_0|$.

注 任何解析函数展开成幂级数的结果就是泰勒级数, 因而是**唯一的**.

2. 泰勒展开方法

- **直接法**: 即直接将复变函数求出各阶导数、套用泰勒公式得到展开式. 利用直接法, 可以求出以下几种函数的泰勒展开式.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (4.2)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (4.3)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots \quad (4.5)$$

- **间接展开法**: 利用已知函数的展开式, 利用幂级数的运算性质和分析性质, 以唯一性为根据来得出泰勒展开式.

4.1.4 洛朗级数

讨论一个包含正幂项和负幂项的级数:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (4.6)$$

其包括两个部分, 即正幂项 (包括常数项) 部分:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (4.7)$$

和负幂项部分:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad (4.8)$$

级数4.7是一个通常的幂级数, 收敛范围是一个圆域. 设其收敛半径为 R_2 , 那么当 $|z - z_0| < R_2$ 时级数收敛.

对于级数4.8, 令 $\zeta = (z - z_0)^{-1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$, 对于 ζ 来说这是一个通常的幂级数, 设其收敛半径为 R , 当 $|\zeta| < R$ 时, 级数收敛. 代回 $\zeta = (z - z_0)^{-1}$, 令 $R_1 = \frac{1}{R}$, 当且仅当 $|\zeta| < R$ 时, $|z - z_0| > R_1$, 此时级数收敛. 即级数4.8在 $|z - z_0| > R_1$ 时收敛.

对于具有正负幂项的双边幂级数, 当且仅当级数4.8和4.7都收敛时, 双边幂级数才收敛. 因此:

- 当 $R_1 > R_2$ 时, 级数4.8和4.7没有公共的收敛范围, 故级数4.6处处发散;
- 当 $R_1 < R_2$ 时, 级数4.8和4.7的公共收敛范围是圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$. 在边界上可能有些点收敛, 有些发散.

性质 可以证明, 级数4.6在收敛圆环域内其和函数是解析的, 而且可以逐项求积、逐项求导. 上述讨论了已知双边幂级数的收敛圆, 以及其在收敛圆环域内和函数解析的性质. 反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开成级数.

定理 4.9 (洛朗级数的展开式)

设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内处处解析, 那么

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (4.9)$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.10)$$

C 为圆环域内绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线. 公式4.9称为函数 $f(z)$ 在以 z_0 为中心的圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的洛朗展开式. 级数中正整次幂部分和负整次幂部分分别称为洛朗级数的解析部分和主要部分.



笔记 一个在某一圆环域内解析的函数展开为含有正、负幂项的级数是唯一的, 这个级数就是 $f(z)$ 的洛朗级数.



然而, 在实际求函数的洛朗展开式时, 一般不使用4.10, 而是像求函数的泰勒展开式那样, 采用间接展开法, 会更加简便. 展开方法与实例见考点解析部分.

定理 4.10 (公式 4.10 在计算积分中的应用)

在公式 4.10 中, 令 $n = -1$, 得

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$$

C 为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内任何一条简单闭曲线, $f(z)$ 在此圆环域内解析.

笔记 这一定理, 可将积分的计算转化为被积函数的洛朗展开式中的 z 的负一次幂项的系数 c_{-1} .

4.2 考点解析

4.2.1 求幂级数的收敛半径

1. 给定常规级数

利用实数项级数的比值法与根值法可以得到两个求幂级数收敛半径的公式, 即

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \right|, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

包括极限为 $+\infty$ 的情形.

2. 给定缺项级数

在遇到诸如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$ 等这样的缺项级数时, 不能直接套用这两个公式. 在解题时, 应使用实数项级数的比值判别法、根值判别法求解收敛半径.

3. 根据条件收敛求收敛半径

结论 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 在 z_1 条件收敛, 则该级数的收敛半径为 $|z_0 - z_1|$.

证明 根据 Abel 定理, 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 在 z_1 条件收敛, 则满足 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ 的一切点 z , 级数绝对收敛. 另一方面, 对于满足 $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ 的点都不可能使该幂级数级数收敛. 否则, 根据 Abel 定理, 该幂级数在 $z = z_1$ 点应绝对收敛, 这与已知条件相矛盾. 综上, 该级数的收敛半径为 $|z_0 - z_1|$.

4. 根据和函数求收敛半径

根据 Abel 定理, 泰勒展开的收敛半径是展开点到最近一个奇点的距离. 当和函数给定时, 我们就可通过找出离展开点最近的奇点来直接求出收敛半径.

例题 4.1 (2023 年期末) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - 2i)^n$ 在 $\sqrt{3} + i$ 处条件收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} c_n z^n$ 的收敛半径是 2.

解 根据题意及上述结论, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - 2i)^n$ 在 $\sqrt{3} + i$ 处条件收敛 $\iff R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| =$

$|\sqrt{3} + i - 2i| = 2$, 而 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} c_n z^n$ 的收敛半径

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n}{n+1} c_n}{\frac{n+1}{n+2} c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| r = 2$$

例题 4.2 (2017 年 B 卷) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^{2n-1}$ 的收敛半径为 $\sqrt{e}$.

解 在我们的级数中, 通项是 $a_n = \frac{n!}{n^n} z^{2n-1}$. 为了应用比值法, 我们计算:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)! / (n+1)^{n+1} \cdot z^{2(n+1)-1}}{n! / n^n \cdot z^{2n-1}} \right| = \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot |z|^2 = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n |z|^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n |z|^2 = \frac{|z|^2}{e}$$

根据比值法, 级数收敛当:

$$\frac{|z|^2}{e} < 1 \implies |z|^2 < e \implies |z| < \sqrt{e}$$

因此, 收敛半径 $R = \sqrt{e}$.

例题 4.3 (2020 期末) 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z+1)^n = \frac{\sin(z+i)}{(z+\sqrt{3}i)(z^2+1)^5(1-\cos z)}$ 的收敛半径为 1.

解 函数 $\frac{\sin(z+i)}{(z+\sqrt{3}i)(z^2+1)^5(1-\cos z)}$ 的奇点是使分母为零的点 $z = -\sqrt{3}i$, $z = i$ 或 $z = -i$, $z = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, 整数). 经比较, $z = \pm i$ 是最近奇点, 故收敛半径为 1.

练习 4.1 若级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ 在 z_1 处条件收敛, 则级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{na_n}{n+1} (z-z_0)^n$ 的收敛半径为 .

练习 4.2 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+1}{2^n} z^n$ 的收敛半径 $R = \underline{\hspace{1cm}}$.

4.2.2 将函数展开为泰勒级数

根据所给函数特点的不同, 将函数展开为泰勒级数有以下几个常见方法:

1. 利用复合运算的性质——变量代换法

当所给函数形式和已知展开式的函数形式相近时, 可引入新变量作变量代换, 使函数在变换后符合可展开的形式。

例题 4.4 将函数 $f(z) = \frac{1}{(z+3)^2}$ 在 $z=1$ 处展开为幂级数, 并指出它的收敛半径。

解 首先求出收敛半径。函数 $f(z)$ 距离展开点最近的奇点为 $z = -3$, 因此收敛半径 $R = 4$, 收敛域 $|z - 1| < 4$.

由于所给函数属于二项式函数 (形式为 $(1+x)^\alpha$, $\alpha = -2$), 为了利用二项展开式, 我们令 $\zeta = \frac{z-1}{4}$, 则有

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)^2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(1+\frac{z-1}{4})^2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(1+\zeta)^2}$$

那么, 当 $|\zeta| < 1$, 即 $|z - 1| < 4$ 时,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{16} \left[1 - 2\left(\frac{z-1}{4}\right) + \frac{2 \cdot 3}{2!} \left(\frac{z-1}{4}\right)^2 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} \left(\frac{z-1}{4}\right)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{16} \left[1 - \frac{1}{2}(z-1) + \frac{3}{16}(z-1)^2 - \frac{1}{16}(z-1)^3 + \dots \right], \quad R = 4 \end{aligned}$$

2. 利用代数运算的性质

当函数可拆成已知展开式的函数的和差或积商, 就可以将展开式相加减/相乘/相除。

例题 4.5 和差的情况 将函数 $f(z) = \frac{z^2 + 7z + 18}{(z+4)^2(z-2)}$ 展开为 z 的幂级数, 并指出它的收敛半径。



笔记 所给函数 $f(z)$ 是一有理分式, 对于这类函数应将它分解为部分分式, 利用二项展开式和等比级数将各项分别展开后, 再利用幂级数的加减法运算就可求得它的幂级数展开式。

解 由于

$$f(z) = \frac{z^2 + 8z + 16 - z + 2}{(z+4)^2(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{(z+4)^2},$$

而

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots + \frac{z^n}{2^n} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}, \quad |z| < 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{(z+4)^2} &= -\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z}{4}\right)^2} \\
&= -\frac{1}{16} \left[1 - 2\left(\frac{z}{4}\right) + \frac{2 \cdot 3}{2!} \left(\frac{z}{4}\right)^2 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} \left(\frac{z}{4}\right)^3 + \cdots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^n \frac{2 \cdot 3 \cdots (n+1)}{n!} \left(\frac{z}{4}\right)^n + \cdots \right] \\
&= -\frac{1}{16} \left[1 - 2\left(\frac{z}{4}\right) + 3\left(\frac{z}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{z}{4}\right)^3 + \cdots + (-1)^n (n+1) \left(\frac{z}{4}\right)^n + \cdots \right] \\
&= \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) \left(\frac{z}{4}\right)^n, \quad |z| < 4,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) \frac{z^n}{2^{2(n+2)}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1} (n+1)}{2^{2n+4}} - \frac{1}{2^{n+1}} \right] z^n, \quad |z| < 2.
\end{aligned}$$

根据泰勒展开定理, R 应等于展开中心 $z_0 = 0$ 到 $f(z)$ 的最近奇点 $z = 2$ 的距离, 故 $R = 2$.

例题 4.6 积的情况 求函数 $e^z \sin z$ 在 $z = 0$ 处的泰勒展开式.

解 由于给定函数是 e^z 与 $\sin z$ 的乘积, 所以, 将这两个函数展开式直接相乘即可得到所求函数的展开式. 事实上,

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad |z| < +\infty, \\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad |z| < +\infty,
\end{aligned}$$

所以,

$$e^z \sin z = z + z^2 + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{30} + \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

注 (1) 求两个幂级数的乘积, 关键在于正确求得乘积级数的系数. 为保证不至于发生错误, 乘积系数可采用**对角线方法**.

对角线方法即柯西乘积定理, 指的是对两个级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, 其乘积可以表示为

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

其中

$$c_0 = a_0 b_0;$$

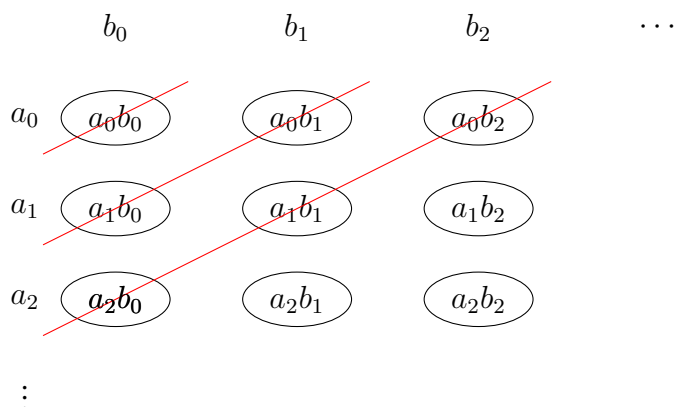
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0;$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0;$$

...

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0;$$

用图像表示 c_n 的式子, 如图所示:



(2) 两个幂级数相乘 (或相除) 后得到的级数通项一般很难求得, 解题时求出前几项或题目要求的前几项即可.

例题 4.7 商的情况 求 $\tan z$ 在 $z = 0$ 处的泰勒展开式到含 z^7 的项.



笔记 我们已知 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的展开式, 而 $\tan z = \sin z / \cos z$, 但是用幂级数的除法求函数的幂级数展开式常常比较麻烦, 此处我们使用待定系数法.

解 $z = \frac{\pi}{2}$ 是 $\tan z$ 离展开中心 $z = 0$ 最近的一个奇点, 所以它可以在区域 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 内展开为幂级数. 设

$$\tan z = c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + c_7 z^7 + \dots$$

(奇函数的幂级数只含 z 的奇次幂, 偶函数的幂级数只含 z 的偶次幂), 而 $\sin z = \tan z \cos z$, 故有

$$\begin{aligned} z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots &= (c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + c_7 z^7 + \dots) \cdot \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \\ &= c_1 z + \left(c_3 - \frac{c_1}{2!} \right) z^3 + \left(c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!} \right) z^5 + \left(c_7 - \frac{c_5}{2!} + \frac{c_3}{4!} - \frac{c_1}{6!} \right) z^7 + \dots, \end{aligned}$$

比较等式两边同次幂的系数得

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, \\ c_3 - \frac{c_1}{2!} &= -\frac{1}{3!} \implies c_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \\ c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!} &= \frac{1}{5!} \implies c_5 = \frac{2}{15}, \\ c_7 - \frac{c_5}{2!} + \frac{c_3}{4!} - \frac{c_1}{6!} &= -\frac{1}{7!} \implies c_7 = \frac{17}{315}, \quad \dots \end{aligned}$$

所以

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

3. 利用分析运算的性质——逐项求导/求积分法

当函数是已知展开式函数的导数/积分, 就可以对展开式逐项求导/求积分。

例题 4.8 把函数 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解 由于函数 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 在单位圆周 $|z| = 1$ 上有一奇点 $z = -1$, 而在 $|z| < 1$ 内处处解析, 所以它在 $|z| < 1$ 内可展开成 z 的幂级数. 由

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots, \quad |z| < 1.$$

把上式两边逐项求导, 即得所求的展开式:

$$\frac{1}{(1+z)^2} = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \dots + (-1)^{n-1} n z^{n-1} + \dots, \quad |z| < 1.$$

4. 利用函数与导数间的关系求出前若干项系数

例题 4.9 求函数 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $z = 0$ 处的 Taylor 级数 (展开到 z^3 项), 并指出它的收敛半径.

 **笔记** 若令 $u = \frac{z}{1-z}$, 则 $e^{\frac{1}{1-z}} = e \cdot e^{\frac{z}{1-z}} = e e^u$. 由于 $u = \frac{z}{1-z}$ 可以展开为 z 的幂级数, e^u 又可展开为 u 的幂级数, 因此, 只要将前者代入后者并合并 z 的同次幂系数就可以得到原函数的泰勒展开式. 所以本题可以用变量代换法来求. 另一方面, 若令 $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$, 将它两边求导并注意到该函数导数仍含指数函数的特点, 可望得到 $f(z)$ 各阶导数之间的递推关系, 从而得到它的各阶导数并算出泰勒系数 c_n . 因此, 本题也可以利用直接方法来求.

解 [变量代换法] 令 $u = \frac{z}{1-z}$, 则

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{1-z}} &= e e^u = e \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots \right) \\ &= e \left[1 + \frac{z}{1-z} + \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{1-z} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{z}{1-z} \right)^3 + \cdots \right] \\ &= e \left[1 + (z + z^2 + z^3 + \cdots) + \frac{1}{2!} (z + z^2 + z^3 + \cdots)^2 + \frac{1}{3!} (z + z^2 + z^3 + \cdots)^3 + \cdots \right] \\ &= e \left(1 + z + \frac{3}{2!} z^2 + \frac{13}{3!} z^3 + \cdots \right), \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

收敛半径显然为 1. 从计算过程中不难发现, 若要求展开式中的项数越多, 则系数的计算越困难!

解 [求导递推法] 设 $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$, 求导得 $f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} e^{\frac{1}{1-z}}$, 从而有

$$(1-z)^2 f'(z) = f(z).$$

对上式逐次求导, 可得:

$$(1-z)^2 f''(z) + (2z-3)f'(z) = 0,$$

$$(1-z)^2 f'''(z) + (4z-5)f''(z) + 2f'(z) = 0,$$

.....

由于 $f(0) = e$, 代入上列各式可得:

$$f'(0) = e, \quad f''(0) = 3e, \quad f'''(0) = 13e, \quad \cdots$$

从而得所求函数的泰勒展开式:

$$e^{\frac{1}{1-z}} = e \left(1 + z + \frac{3}{2!} z^2 + \frac{13}{3!} z^3 + \cdots \right), \quad |z| < 1.$$

用这种方法不难求出它含 z 的更高次幂的泰勒展开式.

4.2.3 将函数展开为洛朗级数

虽然我们在课本中学习了洛朗级数展开式系数公式, 在许多情况下, 一个函数的洛朗展开式不是利用系数公式算出系数来得到, 而是用函数性质所启示的代数运算来求得的. 特别是在将有理分式展开时, 先把该分式用部分分式来表示, 然后用二项展开式把各种各样分母的分式展开成适当形式的级数. 这样做, 往往感到便利.

例题 4.10 (2020 期末) 将 $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$ 在 $|z-1| > 2$ 内展开成以 $z=1$ 为中心的 Laurent 级数。

解 由于 $|z-1| > 2$ 等价于 $\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1$, 且

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{(z-1)^4} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{2}{z-1}\right)^2}$$

令 $\zeta = -\frac{2}{z-1}$, 则

$$\frac{1}{\left(1+\frac{2}{z-1}\right)^2} = \frac{1}{(1-\zeta)^2} = \left(\frac{1}{1-\zeta}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\zeta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-2)^n}{(z-1)^n}$$

因此

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-2)^n}{(z-1)^{n+4}}, \quad |z-1| > 2.$$

练习 4.3 (2021 期末) 求函数 $f(z) = \frac{2(z+1)}{z^2+2z-3}$ 在以 $z=0$ 为中心, 由它的奇点互相隔开的不同圆环域内的洛朗展开式.

解 1. 当 $0 < |z| < 1$ 时:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} - 1 \right) z^n$$

2. 当 $1 < |z| < 3$ 时:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n$$

3. 当 $|z| > 3$ 时:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1} + 1}{z^n}$$

练习 4.4 (2022 期末) 把函数 $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)^2}$ 在圆环域 $0 < |z-2| < 1$ 内展开成洛朗级数.

解 $f(z) = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(z-2)^n, \quad 0 < |z-2| < 1.$

4.2.4 求幂级数的和函数

对于这类题型, 关键在于掌握几个关键函数 ($e^z, \ln(1+z), \frac{1}{1+z}$ 等) 的展开式, 并对所给幂级数的变量进行转换, 使其符合我们所熟悉的展开式形式.

例题 4.11 (2024 年期末) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!}$ 的和函数为 (A)

A. $z(e^{z^2} - 1)$

B. $z(e^{2z} - 1)$

C. $ze^{z^2} - 1$

D. $ze^{2z} - 1$ **解** 根据指数函数的麦克劳林展开式

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \implies e^{z^2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$$

两边同乘 z

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!} = z \cdot (e^{z^2} - 1)$$

因此, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!}$ 的和函数为 $z(e^{z^2} - 1)$, 对应选项 A。

例题 4.12 (2022 年期末) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n - 1)z^{n-1}$ 的和函数 $s(z) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 所求幂级数可拆分成两级数之和, 使得两级数都是等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3^n - 1)z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$$

分别计算两等比级数的和

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{k+1} z^k = 3 \sum_{k=0}^{\infty} (3z)^k = \frac{3}{1-3z}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

将两等比级数的和相加, 得

$$s(z) = \frac{3}{1-3z} + \frac{1}{1-z} = \frac{2}{(1-3z)(1-z)}$$

收敛域为 $|z| < \frac{1}{3}$.

4.3 习题补充

例题 4.13 将 $e^z \cos z$ 和 $e^z \sin z$ 展开为 z 的幂级数.

笔记 由于 $e^z, \cos z$ 与 $\sin z$ 的在 $z=0$ 处的泰勒展开式是已知的, 因此, 我们可以采用幂级数的乘法求得 $e^z \cos z$ 与 $e^z \sin z$ 的关于 z 的幂级数. 但是, 我们知道, 幂级数乘法计算较复杂, 难以求得通项系数 c_n 的一般表达式。

因此, 根据题中的两个函数的形式, 将第二个函数乘以 i 与第一个函数相加减, 通过欧拉公式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ 得到 $e^z \cos z \pm i e^z \sin z = e^z e^{\pm iz} = e^{(1 \pm i)z}$. 因而直接用指数函数的幂级数展开式先求得上式右端的幂级数展开式, 从而易得所给函数的幂级数。

解 由于

$$\begin{aligned} e^z(\cos z + i \sin z) &= e^{(1+i)z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1+i)z)^n}{n!} = 1 + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}}{n!} z^n, \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} e^z(\cos z - i \sin z) &= e^{(1-i)z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n z^n}{n!} = 1 + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}}{n!} z^n. \end{aligned}$$

两式相加并除以 2, 得

$$e^z \cos z = 1 + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} z^n, |z| < +\infty.$$

两式相减并除以 $2i$, 得

$$e^z \sin z = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} z^n, |z| < +\infty.$$

因此, 在遇到含有指数与三角函数的乘法幂级数展开时, 可以利用 $e^{ikz} = \cos kz + i \sin kz$ 来求出通项.

例题 4.14 求函数 $f(z) = \frac{z \sin z}{(1 - e^z)^3}$ 在圆环域 $0 < |z| < 2\pi$ 内洛朗级数的主要部分.

 **笔记** $f(z)$ 距展开中心 $z = 0$ 最近的极点是 $\pm 2\pi i$, 它们都位于圆环域 $0 < |z| < 2\pi$ 的外边界 $|z| = 2\pi$ 上, 故可将 $f(z)$ 在此圆环域内展开为洛朗级数. 利用 $\sin z$ 与 e^z 在 $z = 0$ 的泰勒展开式以及幂级数的除法 (或待定系数法) 就可以求出 $f(z)$ 的洛朗展开式. 由于题目只要求出它的主要部分, 因此, 我们只要关心负幂项的部分, 而不必求出正幂项部分的具体表达式.

在下一章中, 我们将利用洛朗级数的 c_{-1} 系数求留数. 这种方法为我们提供了计算的方便.

解 将 $\sin z$ 与 e^z 在 $z = 0$ 处的泰勒展开式代入 $f(z)$ 的表达式中, 得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \right)}{\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \right)^3} \\ &= -\frac{1}{z} \frac{\left[1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots \right]}{\left[\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots \right) \right]^3} \end{aligned}$$

容易知道, 右端方括号内的分子与分母都是在复平面内收敛的幂级数, 因而它们的和函数在复平面内解析. 又分母在 $z = 0$ 处不为零, 因此, 方括号内部分收敛于一个在 $z = 0$ 解析的函数, 故必可展开为幂级数 $1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$. 从而可知

$$f(z) = -\frac{1}{z} - c_1 - c_2 z - c_3 z^2 - \cdots$$

它的主要部分是 $-\frac{1}{z}$.

第5章 留数

5.1 主要内容

5.1.1 孤立奇点

定义 5.1 (孤立奇点)

如果函数 $f(z)$ 虽在 z_0 不解析, 但在 z_0 的某一个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内处处解析, 那么称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.



1. 孤立奇点的分类

(a). 可去奇点

定义 5.2 (可去奇点)

如果在洛朗级数中不含 $z - z_0$ 的负幂项, 那么孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的可去奇点.



 **笔记** 此时 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内的洛朗级数是一普通幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, 这个幂函数的和函数 $F(z)$ 是在 z_0 解析的函数, 且

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq z_0 \\ c_0 & z = z_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

由于 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = F(z_0) = c_0$, 所以无论 $f(z)$ 在 z_0 原本是否有定义, 如果我们令 $f(z_0) = c_0$, 那么在圆域 $|z - z_0| < \delta$ 内 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, 从而 $f(z)$ 在 z_0 就是解析的. 因此 z_0 称为可去奇点.

(b). 极点

定义 5.3 (极点)

如果在洛朗级数中只有有限多个 $z - z_0$ 的负幂项, 且其中关于 $(z - z_0)^{-1}$ 的最高幂为 $(z - z_0)^{-m}$, 即

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \quad (m \geq 1, c_{-m} \neq 0) \quad (5.2)$$

那么孤立奇点 z_0 称为函数 $f(z)$ 的 m 级极点.

而式5.2也可表示为

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} g(z) \quad (5.3)$$

其中

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \dots$$

在 $|z - z_0| < \delta$ 内是解析的函数, 且 $g(z_0) \neq 0$. 反过来, 当任何一个函数 $f(z)$ 能表示成5.3的形式, 且 $g(z_0) \neq 0$ 时, 那么 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点. 

(c). 本性奇点

定义 5.4

如果在洛朗级数中含有无限多个 $z - z_0$ 的负幂项, 那么孤立奇点 z_0 称为函数 $f(z)$ 的本性奇点. 

综上所述,
$$\begin{cases} z_0 \text{ 为 } f(z) \text{ 的可去奇点} & \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ 存在且有限;} \\ z_0 \text{ 为 } f(z) \text{ 的极点} & \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \\ z_0 \text{ 为 } f(z) \text{ 的本性奇点} & \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ 不存在且不为 } \infty \end{cases}$$

2. 函数的零点与极点的关系

定义 5.5 (函数的零点)

不恒等于零的解析函数 $f(z)$ 如果能表示成

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析并且 $\varphi(z) \neq 0$, m 为某一正整数, 那么 z_0 称为 $f(z)$ 的 m 级零点. 



笔记 可以证明, $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内不为零, 只在 z_0 等于零.

也即, 一个不恒为零的解析函数的零点是孤立的.

定理 5.1 (m 级零点的充要条件)

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 那么 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点的充要条件是

$$f^{(n)}(z_0) = 0 (n = 0, 1, 2, \dots, m-1), f^{(m)}(z_0) \neq 0$$



定理 5.2 (函数的零点与极点的关系)

如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 那么 z_0 就是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点. 反过来也成立. 

3. 函数在无穷远点的性态

定义 5.6 (无穷远的孤立奇点)

如果函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z = \infty$ 的去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 内解析, 那么称点 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点.



 **笔记** 作变换 $t = \frac{1}{z}$, 就可以把在去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 内对函数 $f(z)$ 的研究化为在去心邻域 $0 < |t| < \frac{1}{R}$ 内对函数 $\varphi(t)$ 的研究. 显然 $\varphi(t)$ 在去心邻域 $0 < |t| < \frac{1}{R}$ 内是解析的, 所以 $t = 0$ 是 $\varphi(t)$ 的孤立奇点.

我们规定, 如果 $t = 0$ 是 $\varphi(t)$ 的可去奇点、 m 级极点或本性奇点, 那么 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点、 m 级极点或本性奇点. 将 $f(z)$ 展开, 有

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad (5.4)$$

代入变换 $t = \frac{1}{z}$, 有 $\varphi(t)$ 在圆环域 $0 < |t| < \frac{1}{R}$ 的洛朗级数:

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} t^n + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^{-n} \quad (5.5)$$

根据第一节中对奇点的分析, 对级数 5.5 分析, 再对应到级数 5.4, 有:

如果在级数 5.4 中: $\left\{ \begin{array}{l} \text{不含正幂项, 那么 } z = \infty \text{ 是 } f(z) \text{ 的可去奇点;} \\ \text{含有有限多的正幂项, 且 } z^m \text{ 为最高正幂, 那么 } z = \infty \text{ 是 } f(z) \text{ 的 } m \text{ 级极点;} \\ \text{含有无穷多的正幂项, 那么 } z = \infty \text{ 是 } f(z) \text{ 的本性奇点} \end{array} \right.$

5.1.2 留数

1. 留数的定义及留数定理

定义 5.7 (留数)

留数指解析函数 $f(z)$ 沿着某一圆环域 $0 < |z - z_0| < R$ 内包围某一孤立奇点 z_0 的任一正向简单闭曲线的积分值除以 $2\pi i$. 即

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \quad (5.6)$$

也就是说, $f(z)$ 在 z_0 的留数就是 $f(z)$ 在以 z_0 为中心的圆环域内的洛朗级数中负幂项 $c_{-1}(z - z_0)^{-1}$ 的系数.



定理 5.3 (留数定理)

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 外处处解析. C 是 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线, 那么

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$



 **笔记** 利用这个定理, 求沿封闭曲线 C 的积分, 就转化为求被积函数在 C 中的各孤立奇点处的留数.

2. 留数的计算规则

- (a). 如果 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点, 那么 $c_{-1} = 0$.
- (b). 如果 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点, 那么只能将 $f(z)$ 在 z_0 展开为洛朗级数.
- (c). 如果 z_0 是 $f(z)$ 的极点, 有以下几个特殊情况下的规则:

I. 如果 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 那么

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

II. 如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点, 那么

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\}$$

III. 设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 z_0 都解析, 如果 $P(z) \neq 0, Q(z) = 0, Q'(z) \neq 0$, 那么 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 而

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

3. 在无穷远点的留数**定义 5.8 (留数)**

如果函数 $f(z)$ 在圆环域 $R < |z| < +\infty$ 内解析, C 为这圆环域内绕原点的任何一条正向简单闭曲线, 那么积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z)dz$$

的值与 C 无关, 我们称此定值为 $f(z)$ 在 ∞ 的留数, 记作

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z)dz$$

注 这里积分路线的方向是负的, 也就是取顺时针的方向.



 **笔记** 由 $\operatorname{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz = -c_{-1}$, 知 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数等于它在 ∞ 点的去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 内洛朗展开式中 c_{-1} 的系数变号.

定理 5.4 (无穷远点留数计算定理)

如果函数 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在所有各奇点 (包括 ∞ 点) 的留数的总和必等于零.

**定理 5.5 (无穷远点留数计算规则)**

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$$



定理 5.4 与 5.5 为我们提供了计算函数沿闭曲线积分的又一种方法。在很多情况下, 它比展开洛朗级数的方法更简便。

5.1.3 留数在定积分计算上的应用

1. 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的积分

令 $z = e^{i\theta}$, 则 $dz = \frac{d\theta}{iz}$,

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

从而, 原积分化为沿正向单位圆周的积分

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right] \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z) dz$$

其中 $f(z)$ 为 z 的有理函数, 且在单位圆周 $|z| = 1$ 上分母不为零, 满足留数定理的条件。

因此, 根据留数定理:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

其中 z_k 为包含在单位圆周 $|z| = 1$ 内的 $f(z)$ 的孤立奇点。

2. 形如 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ 的积分

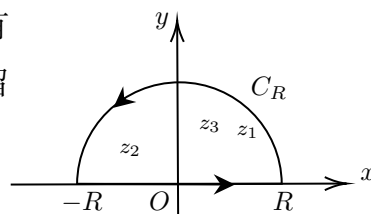
当被积函数 $R(x)$ 是 x 的有理函数, 而分母的次数至少比分子的次数高二次, 并且 $R(z)$ 在实轴上没有孤立奇点时, 积分是存在的。

设

$$R(z) = \frac{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}, \quad m - n \geq 2$$

为一已约分式。

取如图所示的积分路线. 其中, C_R 是以原点为中心, R 为半径的在上半平面的半圆周. 取 R 适当大, 使 $R(z)$ 所有的在上半平面内的极点 z_k 都包在这积分路线内. 根据留数定理:



$$\int_{-R}^R R(x)dx + \int_{C_R} R(z)dz = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z), z_k]$$

可以证明: $|R(z)| < \frac{2}{|z|^2}$. 因此, 在半径 R 充分大的 C_R 上, 有

$$\left| \int_{C_R} R(z)dz \right| \leq \int_{C_R} |R(z)|ds \leq \frac{2}{R^2} \cdot \pi R = \frac{2\pi}{R}$$

所以, 当 $R \rightarrow +\infty$ 时, $\int_{C_R} R(z)dz \rightarrow 0$, 从而

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z), z_k]$$

3. 形如 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\alpha iz}dx$ ($\alpha > 0$) 的积分

当被积函数 $R(x)$ 是 x 的有理函数, 而分母的次数至少比分子的次数高一次, 并且 $R(z)$ 在实轴上没有孤立奇点时, 积分是存在的. 和第二种积分类似,

$$\int_{-R}^R R(x)e^{\alpha iz}dx + \int_{C_R} R(z)e^{\alpha iz}dz = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z)e^{\alpha iz}, z_k]$$

可以证明: $|R(z)| < \frac{2}{|z|}$. 因此, 在半径 R 充分大的 C_R 上, 有

$$\left| \int_{C_R} R(z)e^{\alpha iz}dz \right| \leq \int_{C_R} |R(z)||e^{\alpha iz}|ds \leq \frac{2\pi}{\alpha R}(1 - e^{-\alpha R})$$

所以, 当 $R \rightarrow +\infty$ 时, $\int_{C_R} R(z)dz \rightarrow 0$, 从而

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\alpha iz}dx = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z)e^{\alpha iz}, z_k]$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \alpha x dx + i \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \alpha x dx = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z)e^{\alpha iz}, z_k]$$

5.1.4 对数留数与辐角原理 *

1. 对数留数

定义 5.9 (对数留数)

我们把具有以下形式的积分:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

称为 $f(z)$ 关于曲线 C 的对数留数. 事实上, 对数留数就是函数 $f(z)$ 的对数的导数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在它位于 C 内的孤立奇点处的留数的代数和.



定理 5.6 (对数留数定理)

如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上解析且不为零, 在 C 的内部除去有限个极点以外也处处解析, 那么

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

其中 N 为 $f(z)$ 在 C 内零点的总个数, P 为 $f(z)$ 在 C 内极点的总个数, 且 C 取正向. 在计算零点与极点的个数时, m 级的零点或极点算作 m 个零点或极点.



2. 辐角原理

定理 5.7 (辐角原理)

如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上与 C 内解析, 且在 C 上不等于零, 那么 $f(z)$ 在 C 内零点的个数等于 $\frac{1}{2\pi}$ 乘以当 z 沿 C 的正向绕行一周时 $f(z)$ 的辐角的改变量.



3. Rouché 定理

定理 5.8 (Rouché 定理)

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 上和 C 内解析, 且在 C 上满足条件 $|f(z)| > |g(z)|$, 那么在 C 内 $f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 的零点的个数相同.



5.2 考点解析

5.2.1 孤立奇点的类型判断

课本 5.1 节介绍了几种孤立奇点的类型, 这常作为选择题的出题内容. 此外, 计算孤立奇点的留数前, 对孤立奇点的类型的判断, 也有利于我们选择适合的方法进行计算. 根据孤立奇点、可去奇点、极点、零点、本性奇点的定义, 总结出了下文的判定方法.

1. 先找出函数的所有奇点, 再判定它们是否是孤立的.

点 z_0 为函数 $f(z)$ 孤立奇点的充要条件是: (1) $f(z)$ 在 z_0 不可导; (2) $f(z)$ 在 z_0 某去心邻域内处处可导.

比如, 对于函数 $f(z) = \frac{1}{\cos \frac{1}{z}}$ 在 $z = 0$ 无定义, 不可导, 故 $z = 0$ 是函数的奇点. 由于

$z_k = \frac{1}{(k + \frac{1}{2})\pi} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是分母的零点, 因而都是奇点. 当 $k \rightarrow \infty, z_k \rightarrow 0$, 所以 $z = 0$ 的任何去心邻域内都包含该函数的不可导点, 故 $z = 0$ 不是孤立奇点.

上述例子表明, 如果 z_0 是函数 $f(z)$ 某奇点点列 $\{z_k\}$ 的极限, 则 z_0 不是函数的孤立奇点.

2. 孤立奇点 $z = z_0$ 的判断法则

类型	洛朗级数特点	函数极限特点
可去奇点	洛朗级数不含 $(z - z_0)$ 的负幂项	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在且有限
m 级极点	负幂项 $(z - z_0)$ 有限, 最高负次幂为 $(z - z_0)^{-m}$	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$
本性奇点	洛朗级数含无限 $(z - z_0)$ 的负幂项	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在且不为 ∞

此外, 还可以通过判定 $\frac{1}{f(z)}$ 的零点及其级数, 来判定 $f(z)$ 的极点及其级数.

3. 对无穷远点的类型判断

要判断无穷远点 $z = \infty$ 是否是 $f(z)$ 的孤立奇点、属于哪一类孤立奇点, 可通过变量替换 $z = \frac{1}{t}, f(z) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \varphi(t)$ 转化为原点 $t = 0$ 的奇点问题.

如果经判断, $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 我们有以下的判定规则:

类型	洛朗级数特点	函数极限特点
可去奇点	洛朗级数不含 z 的正幂项	$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 存在且有限
m 级极点	洛朗级数含有限 z 的正幂项, 且 z^m 为最高次幂	$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$
本性奇点	洛朗级数含无限 z 的正幂项	$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 不存在且不为 ∞

4. 计算零点 $z = z_0$ 的零点的级数

零点 $z = z_0$ 的零点的级数主要通过零点的定义判断:

定义 5.10

不恒等于零的解析函数 $f(z)$ 如果能表示成

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析并且 $\varphi(z) \neq 0$, m 为某一正整数, 那么 z_0 称为 $f(z)$ 的 m 级零点.



因此, 可以将函数在 $z = z_0$ 展开为泰勒级数, m 即为泰勒展开中最低次非零项的次数.

例题 5.1 (2024 期末) 已知 $z = 0$ 是 $6 \sin z^2 + z^2(z^6 - 6)$ 的 m 级零点, 则 m 等于 ().

A. 3

B. 6

C. 9

D. 15

解 利用正弦函数的泰勒展开 $\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ($w \in \mathbb{C}$), 令 $w = z^2$, 得:

$$\sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{6} + \frac{z^{10}}{120} - \cdots \quad (\text{仅含偶次项, 最低次为 } z^2)$$

因此

$$f(z) = (6z^2 - z^6 + \cdots) + (z^8 - 6z^2) = -z^6 + z^8 + \cdots$$

可见, 最低次非零项为 $-z^6$, 次数为 **6**, 故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 6 级零点。因此, 选项为 B。

例题 5.2 (2024 期末) $z=1$ 是函数 $f(z) = \cos \frac{2}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$ 的 ()。

- A. 可去奇点 B. 二级极点 C. 本性奇点 D. 非孤立奇点

解 令 $t = z - 1$, 则函数变为:

$$g(t) = \cos \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}$$

展开 $\cos \frac{2}{t}$ 的 Laurent 级数, 得:

$$\cos \frac{2}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2/t)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} t^{-2n}$$

因此, 函数 $g(t)$ 的 Laurent 展开为:

$$g(t) = 1 - \frac{2^2}{2!} t^{-2} + \frac{2^4}{4!} t^{-4} - \cdots + t^{-2} = 1 - t^{-2} + \frac{2^4}{4!} t^{-4} - \cdots$$

有无穷多个负幂项, 因此, $z=1$ 是函数 $f(z)$ 的本性奇点, 选择 C 选项。

 **练习 5.1** (2022 期末) 求留数 $\text{Res} \left[\tan \frac{1}{z-1}, 1 \right] = \underline{\hspace{2cm}}$

 **练习 5.2** (2022 期末) $z=1$ 是函数 $f(z) = (z-1)^2 \cos \frac{z+1}{z-1}$ 的 ()。

- A. 零点 B. 本性奇点 C. 可去奇点 D. 一级极点

 **练习 5.3** (2021 期末) ∞ 为 $f(z) = z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$ 的 ()。

- A. 一级极点 B. 二级极点 C. 可去奇点 D. 本性奇点

解 练习题答案: 不存在; B; A.

5.2.2 留数的计算

对于函数 $f(z)$ 在点 $z = z_0$ 处的留数, 有如下的计算规则:

1. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点, 那么 $c_{-1} = 0$.
2. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点, 那么只能将 $f(z)$ 在 z_0 展开为洛朗级数.

3. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的极点, 有以下几个特殊情况下的规则:

(a). 如果 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 那么

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

(b). 如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点, 那么

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\}$$

(c). 设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 z_0 都解析, 如果 $P(z) \neq 0, Q(z) = 0, Q'(z) \neq 0$, 那么 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 而

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

除了计算规则外, 若奇点类型难以判断, 且 $f(z)$ 的洛朗展开式易于求得时, 我们可以根据洛朗展开式系数的结论 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}$ 直接求出函数在 $z = z_0$ 的留数.

例题 5.3 (2024 期末) 设 $f(z)$ 为复平面上的解析函数, 则 $\operatorname{Res}\left[\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)f(z), 0\right] = (\quad)$.

A. $f(0) + f'(0)$

B. $f(0) - f'(0)$

C. $f(0)$

D. $f'(0)$

解 解析函数 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处的泰勒展开为:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \cdots$$

将 $\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)f(z)$ 展开, 提取 $\frac{1}{z}$ 项的系数 (留数定义):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)f(z) &= \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)(f(0) + f'(0)z + \cdots) \\ &= \frac{f(0)}{z} + f'(0) + \cdots + \frac{f(0)}{z^2} + \frac{f'(0)}{z} + \cdots \end{aligned}$$

$\frac{1}{z}$ 项的系数为 $f(0) + f'(0)$, 故留数为 $f(0) + f'(0)$.

例题 5.4 设 $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$, 则 $\operatorname{Res}[f(z), 0] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 所求函数的展开式易求得, 因此我们选择求出 c_{-1} :

$$z^4 e^{\frac{1}{z}} = z^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4-n}}{n!}$$

当 $n = 5$ 时, 项为 $\frac{z^{4-5}}{5!} = \frac{z^{-1}}{120}$, 故 $\frac{1}{z}$ 项的系数为 $\frac{1}{120}$.

例题 5.5 求留数 $\operatorname{Res}\left(\frac{3\pi - z}{\sin^2 z}, 3\pi\right)$ 的值.

A. 1

B. -1

C. 3π

D. $-\frac{1}{3\pi}$

解 由于分母 $\sin^2 z$ 在 $z = 3\pi$ 处是二级零点, 分子 $3\pi - z$ 在 $z = 3\pi$ 处是一级零点, 所以 $f(z)$ 在 $z = 3\pi$ 处为一级极点.

因此, $\text{Res}(f, 3\pi) = \lim_{z \rightarrow 3\pi} (z - 3\pi)f(z) = \lim_{z \rightarrow 3\pi} -\frac{(z - 3\pi)^2}{\sin^2 z} = -1$ 。

 **练习 5.4** 求留数 $\text{Res}\left(\frac{1 - \cos z}{z^6}, 0\right)$ 的值。

 **练习 5.5** 求留数 $\text{Res}\left(\frac{z^2}{\sin^4 z}, 0\right)$ 的值。

解 练习题答案: 0; 0.

对于函数 $f(z)$ 在点 $z = \infty$ 处的留数的计算方法:

1. 使用无穷远点处留数计算公式计算:

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -\text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

2. 根据定理 5.4 计算: 即如果函数 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在所有各奇点 (包括 ∞ 点) 的留数的总和必等于零。

当 $f(z)$ 在有限处奇点较少时, 可以先求出有限奇点的留数之和, 其相反数就是无穷远点的留数。

例题 5.6 (2024 期末) 求留数 $\text{Res}\left(\frac{2z}{z^2 - 4}, \infty\right)$ 的值。

解 $f(z)$ 的有限奇点为 $z = 2$ 和 $z = -2$ (均为一级极点)。

$$\text{Res}(f(z), 2) = \lim_{z \rightarrow 2} (z - 2) \cdot \frac{2z}{(z - 2)(z + 2)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{2z}{z + 2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{Res}(f(z), -2) = \lim_{z \rightarrow -2} (z + 2) \cdot \frac{2z}{(z - 2)(z + 2)} = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{2z}{z - 2} = \frac{-4}{-4} = 1$$

因此

$$\text{Res}(f(z), \infty) = -[\text{Res}(f(z), 2) + \text{Res}(f(z), -2)] = -(1 + 1) = -2$$

5.2.3 利用留数定理计算围道积分

我们在本册中学习的定理中, 能够解决围道积分 (闭曲线积分) 的有以下几种: 柯西积分公式、高阶导数公式、留数定理。其中, 留数定理解决问题的范围最广: 柯西积分公式、高阶导数公式能解决的问题, 留数定理亦能解决; 柯西积分公式、高阶导数公式不能解决的, 一定使用留数定理。但这并不意味着这两个公式无用武之地, 在特定情况下, 它们可能更为简便。

根据留数定理, 围道积分

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k]$$

其中 C 是包围诸奇点的一条正向简单闭曲线。

当 C 内有限孤立奇点 z_k 较多/有的极点的级数太高/某些奇点处的留数难以求得时, 根据定理 5.4, 可以将求 C 内有限孤立奇点处的留数问题转化为求 $f(z)$ 在 C 外的有限孤立奇点和无

穷远处的留数, 从而使积分的计算简化.

例题 5.7 (2024 期末) 求 $\oint_C z e^{\frac{1-z}{z}} dz$, 其中 $C: |z| = 1$ 正向.

解 化简得

$$I = \frac{1}{e} \oint_C z e^{\frac{1}{z}} dz$$

此时 $z = 0$ 是 $z e^{\frac{1}{z}}$ 在 $C: |z| = 1$ 内的孤立奇点.

将被积函数展开, 得

$$z e^{\frac{1}{z}} = z \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots \right) = z + 1 + \frac{1}{2!z} + \cdots$$

由于 $\text{Res}[z e^{\frac{1}{z}}, 0] = c_{-1} = \frac{1}{2}$,

$$I = \frac{1}{e} \oint_C z e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{1}{e} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}[z e^{\frac{1}{z}}, 0] = \frac{\pi i}{e}$$

例题 5.8 (2022 真题) 求 $\oint_C \bar{z}^2 e^{-3z} dz$ (其中 C 为圆周 $|z| = 1$ 的正向) 的值.

解 因 $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, 所以在圆周 $|z| = 1$ 上, $\bar{z} = \frac{1}{z}$. 故被积函数 $\bar{z}^2 e^{-3z}$ 变为 $\frac{e^{-3z}}{z^2}$. 该函数在 $|z| = 1$ 内仅 $z = 0$ 为二阶极点. 被积函数的洛朗展开式为:

$$\frac{e^{-3z}}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{3}{z} + \frac{9}{2!} - \cdots$$

其中 $\frac{1}{z}$ 项 (留数) 系数为 -3 .

根据留数定理, 沿正向闭曲线 C 的积分

$$\oint_C \frac{e^{-3z}}{z^2} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}[f(z), 0] = 2\pi i \cdot (-3) = -6\pi i$$

 **笔记** 当被积函数出现 $\bar{z}$, 设积分曲线为 $|z| = c$, 在曲线上 $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{c^2}{z}$.

例题 5.9 (2022 期末) 计算 $\oint_{|z|=\frac{3}{4}} \frac{z^{13}}{(z^2 + \frac{1}{2})^3 (z^2 - \frac{1}{2})^4 (z-1)} dz$ 的值.

解 被积函数的有限孤立奇点有: $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ 在曲线内, $z = 1$ 在曲线外. 根据留数定理及无穷远点留数关系:

$$\oint_C f(z) dz = -2\pi i (\text{Res}[f(z), \infty] + \text{Res}[f(z), 1])$$

由于 $z = 1$ 是一个一级极点,

$$\text{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \frac{128}{27}$$

利用无穷远点留数计算规则,

$$\text{Res}[f(z), \infty] = \text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right] = \text{Res}\left[\frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^2)^3 (1 - \frac{1}{2}z^2)^4 (1-z)}, 0\right] = 0.$$

因此

$$I = -2\pi i \cdot \frac{128}{27} = \frac{-256\pi i}{27}$$

 **练习 5.6** (2024 期末) 计算 $\oint_C \frac{zdz}{\sin z(1 - \cos z)}$, 其中 $C: |z| = 4$ 正向.

 **练习 5.7** (2022 期末) 计算 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left[\frac{\sin(z \cos z)}{z-2} - \frac{\ln(1+z)}{z} \right] dz$ 的值.

 **练习 5.8** (2022 期末) 计算 $\oint_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{z+e^z}{\cos z} dz$ 的值.

解 练习题答案: $0; 0; -2\pi i \left(\frac{\pi}{2} + e^{\frac{\pi}{2}} \right)$.

5.2.4 利用留数计算实积分

课本 4.3 中给出了几种不同实积分的计算方法. 熟记以下几个公式, 并结合复数的三角式和函数的奇偶性进行转换, 就能够解决基础的实积分计算问题.

1. 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的积分

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right] \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k] \quad (5.7)$$

2. 形如 $\int_{-R}^R R(x) dx$ 的积分

当被积函数 $R(x)$ 是 x 的有理函数, 而分母的次数至少比分子的次数高二次, 并且 $R(z)$ 在实轴上没有孤立奇点时:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z), z_k] \quad (5.8)$$

其中 z_k 为复平面上半平面内的极点.

3. 形如 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{\alpha i x} dx$ 的积分

当被积函数 $R(x)$ 是 x 的有理函数, 而分母的次数至少比分子的次数高一次, 并且 $R(z)$ 在实轴上没有孤立奇点时:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{\alpha i x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \alpha x dx + i \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \alpha x dx = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z) e^{\alpha i z}, z_k] \quad (5.9)$$

例题 5.10 (2024 期末) 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(4x)}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ 的值.

 **笔记** 这道题中的被积函数看似并不满足上述三种情况的任何一种, 且积分上下限不为 $(-\infty, +\infty)$. 但根据被积函数的奇偶性质、复数的三角表示方法, 我们可以将其转换为式 5.9 中的积分进行

计算.

设存在奇函数 $f(z)$ 和偶函数 $g(z)$, 二者都是 x 的有理函数, 分母的次数至少比分子的次数高一次, 并且在实轴上没有孤立奇点. 容易证明, 有以下结论:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin(kx) dx = -\frac{1}{2}i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{kix} dx \quad (5.10)$$

$$\int_0^{+\infty} g(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{kix} dx \quad (5.11)$$

解 观察被积函数, 发现有理函数 $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}$ 是奇函数, 且满足分母的次数至少比分子的次数高一次, 复平面内有限孤立极点为 $\pm 2i, \pm i$, 在实轴上没有孤立奇点. 结合式 5.10, 有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(4x)}{(x^2+1)(x^2+4)} dx &= -\frac{1}{2}i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \\ I &= -\frac{1}{2}i \cdot 2\pi i \cdot \left[\operatorname{Res} \left[\frac{x e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}, 2i \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{x e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}, i \right] \right] \\ &= \frac{\pi}{6} (e^{-4} - e^{-8}) \end{aligned}$$

例题 5.11 (2021 真题) 设 $f(z)$ 在 $|z| < R (R > 1)$ 内解析, $f(0) = 1, f'(0) = 0$, 证明

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta) f(e^{i\theta}) d\theta = 2\pi.$$

解

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|=1} \left(1 + \frac{z^2+1}{2z} \right) f(z) \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{(z+1)^2}{z^2} f(z) dz \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} \operatorname{Res} \left[\frac{(z+1)^2}{z^2} f(z), 0 \right] \\ &= \pi \left[\frac{d}{dz} (z+1)^2 f(z) \right]_{z=0} \\ &= \pi [2f(0) + f'(0)] = 2\pi. \end{aligned}$$

 **练习 5.9** (2022 期末) 用留数定理计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x+2)}{4+x^2} dx$.

 **练习 5.10** (2021 期末) 利用留数计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x dx}{(x^2+1)^2}$.

 **练习 5.11** (2019 期末) 利用留数计算 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

解 练习题答案: $\frac{\pi}{2e^2} \sin 2; \frac{\pi}{8} (1 + \frac{3}{e^2}); \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

5.3 习题补充

在考点解析的第四部分中,我们提到了计算三种类型的实积分的方法,大致方法是将被积函数对应到某一类型的实积分,利用公式,将积分问题转化为求留数的问题.

实际上,不符合以上三种特殊形式的实积分,也可以用类似的步骤求解.我们可以举一反三,计算一些更复杂的实积分.这些方法的共同思路是:设法将所求实积分化为一个复变函数沿某条封闭曲线的积分,再利用留数定理,通过计算在该封闭曲线内所包含的被积函数各奇点处的留数,求得积分的值.

对于第一种类型的实积分,即三角有理函数 $R(\sin \theta, \cos \theta)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的定积分,只要利用变量代换 $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 和欧拉公式,就可以将这类积分化为一个复变有理函数沿单位圆 $|z| = 1$ 的积分.

对于第二与第三种类型的实积分,它们的被积函数都是有理函数 $R(x)$ 或 $R(x)e^{iax}$ ($a > 0$),求解的步骤要复杂一些,大体上可归纳为如下三步:

Step1 作一辅助复变函数 $F(z)$,使得当 z 在实轴上的区间 (a, b) 内变化时, $F(x) = R(x)$ 或者 $R(x)e^{iax}$;

Step2 作一条(或几条)按段光滑的辅助曲线 Γ ,使它与区间 (a, b) 组成一条封闭曲线并围成一个区域 D , $F(z)$ 在 D 内除有限个孤立奇点 z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 外处处解析;

Step3 根据留数定理,

$$\int_a^b F(x)dx + \int_{\Gamma} F(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(z), z_k]$$

如果积分 $\int_{\Gamma} F(z)dz$ 能够算出,那么实积分 $\int_a^b F(x)dx$ 就能求得.若该实积分是无穷积分,则对式两端取极限,并求得 $\int_{\Gamma} F(z)dz$ 的极限值,从而就能得到所求无穷积分的值.课本中的第二、三类实积分就是两个特例.

例题 5.12 计算无穷积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$ ($0 < a < 1$).

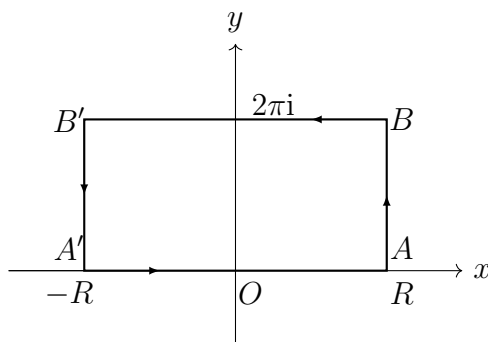
解 取辅助函数为

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z} \quad (0 < a < 1)$$

根据复指数函数的周期性,我们有

$$f(z + 2\pi i) = \frac{e^{a(z+2\pi i)}}{1+e^z} = e^{2a\pi i} f(z)$$

这就是说, $f(z)$ 在平行于实轴的直线 $\text{Im}(z) = 2\pi$ 上的值等于它在实轴上的值乘以常数因子 $e^{2a\pi i}$. 因此,我们可取如图所示的矩形边界作为积分闭路.在此矩形内, $f(z)$ 只有一个一级极点 $z = \pi i$.



根据留数定理,

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \pi i] \\ &= 2\pi i \cdot \frac{e^{a\pi i}}{(1+e^z)'|_{z=\pi i}} = -2\pi i e^{a\pi i} \end{aligned}$$

其中

$$I_1 = \int_{A'A} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx,$$

$$I_3 = \int_{BB'} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2a\pi i} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx,$$

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{AB} f(z) dz \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} dy \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| dy \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R - 1} dy = \frac{e^{(a-1)R}}{1 - e^{-R}} \cdot 2\pi \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_4| &= \left| \int_{B'A'} f(z) dz \right| \\ &= \left| \int_{2\pi}^0 \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} dy \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} \right| dy \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} dy \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

从而得

$$(1 - e^{2a\pi i}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -2\pi i e^{a\pi i},$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i} - 1} = \pi \frac{2i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

例题 5.13 证明:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{2b^2}(1 - e^{-ab})$$

其中 a 与 b 为正实数.



笔记 题中的实积分与教材中的第 3 类实积分相似, 按照用留数计算实积分的思路, 可选辅助函数 $F(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)}$ 。但是, 由于 $F(z)$ 在实轴上有奇点 $z = 0$, 因此不能像处理第 3 类积分那样选择积分路径, 而应取如图 5.3 所示的闭曲线 C , 使 $z = 0$ 不在 C 内, 并使 $F(z)$ 在上半平面的孤立奇点 $z = bi$ 包含在 C 内, 然后再应用留数定理, 即可求得题中积分 I 的值。

解 由于 $F(z)$ 在 C 内仅有一个一级极点 $z = bi$, 并且

$$\text{Res}[F(z), bi] = \left. \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)'} \right|_{z=bi} = -\frac{e^{-ab}}{2b^2},$$

所以, 根据留数定理有

$$\oint_C F(z) dz = 2\pi i \text{Res}[F(z), bi] = -\frac{\pi i}{b^2} e^{-ab},$$

或

$$\left(\int_{-R}^{-r} + \int_{C_r} + \int_r^R + \int_{C_R} \right) \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz = -\frac{\pi i}{b^2} e^{-ab}. \quad (1)$$

而

$$\left(\int_{-R}^{-r} + \int_r^R \right) \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz = \int_r^R \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{x(x^2 + b^2)} dx \quad (5.12)$$

$$= 2i \int_r^R \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx. \quad (5.13)$$

$$\frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} = \frac{1}{b^2 z} \cdot \frac{e^{iaz}}{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2} = \frac{1}{b^2 z} \left(1 - \frac{z^2}{b^2} + \frac{z^4}{b^4} - \dots \right) e^{iaz}$$

$$= \frac{1}{b^2 z} + \frac{\varphi(z)}{z}, \quad \varphi(z) = \left(-\frac{z^2}{b^4} + \frac{z^4}{b^6} - \dots \right) e^{iaz}$$

易见, $\varphi(z)$ 是解析函数, 且当 $z \rightarrow 0$ 时, $\varphi(z) \rightarrow 0$, 故

$$\int_{C_r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz = \frac{1}{b^2} \int_{C_r} \frac{dz}{z} + \int_{C_r} \frac{\varphi(z)}{z} dz$$

令 $z = re^{i\theta}$, 则

$$\int_{C_r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz = -\frac{\pi i}{b^2} + i \int_{\pi}^0 \varphi(re^{i\theta}) d\theta \rightarrow -\frac{\pi i}{b^2} \quad (r \rightarrow 0) \quad (3)$$

又

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{-aR \sin \theta}}{R^2} d\theta \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \quad (4)$$

合并 (1), (2), (3), (4) 式并令 $R \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow 0$, 即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab})$$

第二部分

积分变换

第 6 章 Fourier 变换

6.1 主要内容

6.1.1 Fourier 积分

定义 6.1 (Fourier 积分公式)

称

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega$$

为函数 $f(t)$ 的 **Fourier** 积分公式¹.

工程上一般用 j 作为虚数单位.



定理 6.1 (Fourier 积分定理)

如果函数 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足如下条件:

- 在任一有限区间上满足 **Dirichlet** 条件, 即在任意有限区间上都只有有限个间断点和极值点, 且每个间断点都是有限的。
- 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

则有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega$$

成立, 且在 $f(t)$ 的间断点 $t = t_0$ 处, 有

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega$$



Fourier 积分公式还可以写成三角形式:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau \right] d\omega$$

当 $f(t)$ 是奇函数时, 有

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega\tau d\tau \right] d\omega$$

当 $f(t)$ 是偶函数时, 有

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right] d\omega$$

它们分别成为 **Fourier 正弦积分公式**和 **Fourier 余弦积分公式**。

6.1.2 Fourier 变换的定义

定义 6.2 (Fourier 变换)

若函数 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 Fourier 积分定理的条件, 则称函数

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

为 $f(t)$ 的 **Fourier 变换**, 记作

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$

称函数

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

为 $F(\omega)$ 的 **Fourier 逆变换**, 记作

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

称 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 构成了一个 **Fourier 变换对**, 其中 $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的象函数, $f(t)$ 为 $F(\omega)$ 的象原函数



当 $f(t)$ 为奇函数时, 称

$$F_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

为 $f(t)$ 的 **Fourier 正弦变换式**, 而

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega$$

为 $F(\omega)$ 的 **Fourier 正弦逆变换式**。

同理, 当 $f(t)$ 为偶函数时,

$$F_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

为 $f(t)$ 的 **Fourier 余弦变换式**, 而

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \cos \omega t d\omega$$

为 $F(\omega)$ 的 **Fourier 余弦逆变换式**。

6.1.3 δ 函数的定义与性质**定义 6.3 (δ 函数)**

称具有如下性质的函数 $\delta(t)$ 为单位脉冲函数：

•

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

• $\delta(t) = 0, t \neq 0$ 

δ 函数具有以下性质（约定 $f(t)$ 为任一无穷次可微函数）：

性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

证明

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \delta(t - t_0) f(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} f(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \cdot 2\varepsilon f(t_0) \\ &= f(t_0) \end{aligned}$$

性质 设

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

则

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt, \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

其中 $u(t)$ 称为单位阶跃函数的导数。

性质 若 a 为非零实常数，则

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

证明 当 $a > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) f\left(\frac{u}{a}\right) \frac{1}{a} du \quad (u = at) \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) f\left(\frac{u}{a}\right) du \\ &= \frac{1}{a} f(0)\end{aligned}$$

同理, 当 $a < 0$ 时, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) f(t) dt = -\frac{1}{a} f(0)$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) f(t) dt = \frac{1}{|a|} f(0)$$

另一方面,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} \delta(t) f(t) dt = \frac{1}{|a|} f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) f(t) dt$$

由 $f(t)$ 的任意性知

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t - t_0) f(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0)$$

证明

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t - t_0) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) d\delta^{(n-1)}(t - t_0) \\ &= f(t) \delta^{(n-1)}(t - t_0) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \delta^{(n-1)}(t - t_0) dt\end{aligned}$$

不断这样做下去, 得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t - t_0) f(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0)$$

6.1.4 Fourier 变换的性质

定理 6.2 (位移性质)

设 $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$, α, β 是常数, 则

$$\mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$$

该性质由积分的线性性质即得。



定理 6.3 (位移性质)

- 时域上的位移性质:

$$\mathcal{F}[f(t \pm t_0)] = e^{\pm j\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)]$$

- 频域上的位移性质:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega \mp \omega_0)] = f(t) e^{\pm j\omega_0 t}$$

**证明**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t \pm t_0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \pm t_0) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{j\omega(u \mp t_0)} du \quad (t \pm t_0 = u) \\ &= e^{\pm j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\omega u} du \\ &= e^{\pm j\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)] \end{aligned}$$

频域上的位移性质证明方法类似, 但要注意频域上的位移转换到时域上后, 需要添加一个负号。

定理 6.4 (时域上的微分性质)

如果 $|t| \rightarrow \infty$ 时, $f(t) \rightarrow 0$, 则

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega \mathcal{F}[f(t)]$$

**证明**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= 0 + j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= j\omega \mathcal{F}[f(t)] \end{aligned}$$

该性质表明一个函数的导数的 Fourier 变换, 等价这个函数的 Fourier 变换乘以因子 $j\omega$

推论 6.1

若

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f^{(k)}(t) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

则有

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n \mathcal{F}[f(t)]$$



可以用上述推论将微分运算转化为代数运算，从而简化微分方程的求解。

定理 6.5 (频域上的微分性质)

设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ ，则

$$\frac{d}{d\omega} F(\omega) = \mathcal{F}[-jt f(t)]$$



证明 由

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

知

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\partial}{\partial \omega} e^{-j\omega t} dt \\ &= -jt \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= -jt \mathcal{F}[f(t)] \end{aligned}$$

推论 6.2

$$\frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega) = (-j)^n \mathcal{F}[t^n f(t)]$$

即

$$\mathcal{F}[t^n f(t)] = j^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$$



也就是说，对象原函数乘以 t^n ，等价于对象函数乘以 j^n 再求 n 阶导。该性质常被用来计算形如 $t^n f(t)$ 的函数的 Fourier 变换。

定理 6.6 (时域上的积分性质)

设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ ，若

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^t f(t) dt = 0$$

则

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t f(t) dt \right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

证明可根据时域上的微分性质得到。



定理 6.7 (对偶性)

若 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ，则 $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$



证明 由

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

知

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将上式中的 ω 换成 u , 得

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{-jut} du$$

从而

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[F(u)]$$

将上式中的 t 换成 ω , u 换成 t , 就有

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

定理 6.8 (缩放性质)

若 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, a 为非零实常数, 则

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



证明 当 $a > 0$ 时

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(at)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\omega \frac{u}{a}} d\left(\frac{u}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\omega \frac{u}{a}} du \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

同理, 当 $a < 0$ 时, 有

$$\mathcal{F}[f(at)] = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

综上,

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

定理 6.9 (乘积定理)

若 $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) d\omega$$

**证明**

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_1(t)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

由于 $F_1(\omega)$ 与 $F_2(\omega)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积, 则积分次序可交换:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_1(t)} e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_1(t)} e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_1(t)} e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) d\omega \end{aligned}$$

定理 6.10 (能量积分)

若 $f(t)$ 是实函数, $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$



证明 在乘积定理中, 令 $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \overline{F(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \end{aligned}$$

其中

$$S(\omega) = |F(\omega)|^2$$

称为 $f(t)$ 的能量密度函数或能量谱密度。

6.1.5 基本 Fourier 变换对

为叙述方便, 作如下约定:

1.

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

称为归一化的 sinc 函数

2.

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

称为单位阶跃函数；

3.

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

称为矩形脉冲函数；

4.

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

称为三角脉冲函数；

5.

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

称为符号函数；

6. $\delta(t)$ 称为单位冲激函数。

下表给出了常用的 Fourier 变换对及其物理意义

时域 $f(t)$	频域 $F(\omega)$	说明
$\delta(t)$	1	冲激信号中包含了所有频率成分，且幅度相等
1	$2\pi\delta(\omega)$	直流信号只在频率 0 处有冲击
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	单一频率的复振动的频谱是单一冲激
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$	实余弦的频谱由两个共轭的复频率构成
$\sin \omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
$e^{-\beta t}u(t)$	$\frac{\beta - j\omega}{\beta^2 + \omega^2}$	
$\Pi(t)$	$\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$	脉冲函数在时域上有限，在频域上无限
$\Lambda(t)$	$\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$	
$e^{-\beta t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$	Gauss 函数的 Fourier 变换仍是 Gauss 函数
$\text{sinc}(t)$	$\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$	sinc 函数是矩形脉冲函数的“对偶”

证明如下：

1.

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \delta(t) dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

2.

$$\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = 1$$

故

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

3.

$$\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] = \mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t} \cdot 1] = \mathcal{F}[1](\omega - \omega_0) = 2\pi\delta\omega_0$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + \omega_0)e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t}|_{\omega=\omega_0} + e^{j\omega_0 t}|_{\omega=-\omega_0}) \\
&= \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\
&= \cos \omega_0 t
\end{aligned}$$

5. $\sin \omega_0 t$ 与 $\cos \omega_0 t$ 类似。

6.

$$\mathcal{F}[sgn(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} sgn(t)e^{-j\omega t} dt$$

该积分在通常意义下不收敛，为了计算它，我们引入收敛因子 $e^{-|a|t}$ ，设

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} sgn(t)e^{-|a|t}e^{-j\omega t} dt$$

则当 $a \rightarrow 0$ 时， $I = \mathcal{F}[sgn(t)]$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt \\
&= \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} \\
&= \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

由

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

知

$$\mathcal{F}[sgn(t)] = \frac{2}{j\omega}$$

注 在上述计算过程中，我们发现所求积分在通常意义下不收敛，但是当我们引入收敛因子后积分的值就容易求得，再考察所得结果的极限，就可以“计算”原积分的值。这种方法称作**正规化**，在物理（尤其是量子力学）和工程中应用非常广泛。

7.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[u(t)] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t)\right] \\
&= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[e^{-\beta t}u(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-(\beta+j\omega)t} dt \\
 &= \frac{1}{\beta + j\omega} \\
 &= \frac{\beta - j\omega}{\beta^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\Pi(t)] &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega t} dt \\
 &= -\frac{1}{j\omega} (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}) \\
 &= \frac{2}{\omega} \cdot \frac{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}{2j} \\
 &= \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega}{2} \\
 &= \text{sinc} \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)
 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\Lambda(t)] &= 2 \int_0^1 (1-t) \cos \omega t dt \\
 &= 2 \int_0^1 \cos \omega t dt - 2 \int_0^1 t \cos \omega t dt \\
 &= \left. \frac{2 \sin \omega t}{\omega} \right|_0^1 - \left. \frac{2t \sin \omega t}{\omega} \right|_0^1 + \frac{2}{\omega} \int_0^1 \sin \omega t dt \\
 &= -\left. \frac{2 \cos \omega t}{\omega^2} \right|_0^1 = 2 \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\omega^2} = \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}}{(\frac{\omega}{2})^2} = \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)
 \end{aligned}$$

11. $\mathcal{F}[e^{-\beta t^2}]$ 的计算从略, 请读者自行翻阅教材。

12. 已知

$$\mathcal{F}[\Pi(t)] = \text{sinc} \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)$$

由对称性, 有

$$\mathcal{F}[\text{sinc} \left(\frac{t}{2\pi} \right)] = 2\pi \Pi(-\omega) = 2\pi \Pi(\omega)$$

由缩放性质, 有

$$\mathcal{F}[\text{sinc}(t)] = \Pi \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)$$

根据上述基本 Fourier 变换对, 再利用 Fourier 变换的性质, 就可以计算许多函数的 Fourier 变换

6.1.6 卷积及其性质

定义 6.4 (卷积)

称积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

为函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积, 记作 $f_1(t) * f_2(t)$ 。

卷积具有如下性质

1. 交换律:

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

2. 结合律:

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$$

3. 分配律:

$$f_1(t)[f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

4. 数乘:

$$a[f_1(t) * f_2(t)] = [af_1(t)] * f_2(t) = f_1(t) * [af_2(t)]$$

5. 微分:

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt}f_1(t) * f_2(t) = f_1(t) * \frac{d}{dt}f_2(t)$$

6. 积分:

$$\int_{-\infty}^{\xi} [f_1(t) * f_2(\xi)] d\xi = f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^t f_1(\xi) d\xi * f_2(t)$$

7. 不等式:

$$|f_1(t) * f_2(t)| \leq |f_1(t)| * |f_2(t)|$$

即卷积的绝对值小于等于绝对值的卷积。

定理 6.11 (卷积定理)

设 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$, $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$, 则

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$



证明

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(t) * f_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} f_2(t - \tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d\tau dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(u) e^{-j\omega u} du \right] d\tau \quad (u = t - \tau) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(u) e^{-j\omega u} du \\
&= F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)
\end{aligned}$$

同理 (对 $F_1(\omega) * F_2(\omega)$ 作 Fourier 逆变换) 可得

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

6.2 考点解析

6.2.1 求 Fourier 积分表达式并推证积分结果

直接套用 Fourier 积分公式即可, 注意当 $f(t)$ 是奇函数或偶函数时, 可以使用正弦积分或余弦积分简化计算。

例题 6.1 设

$$f(t) = e^{-\beta|t|} (\beta > 0)$$

求 $f(t)$ 的 Fourier 积分, 并证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}$$

解 由 $f(t)$ 是偶函数, 知

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \right] \cos \omega t d\omega$$

计算内层积分：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt &= \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cos \omega t dt \\&= \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \frac{e^{j\omega t}}{-j\omega} dt \\&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta + j\omega} + \frac{1}{\beta - j\omega} \right) \\&= \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

代入原积分表达式：

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2} \cos \omega t d\omega$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}$$

6.2.2 通过定义求 Fourier 变换

直接按定义计算即可，常见于分段函数的计算。

例题 6.2 求函数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 3 \\ 0, & |t| > 3 \end{cases}$$

的 Fourier 变换

解

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-3}^3 e^{-j\omega t} dt \\&= -\frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \Big|_{-3}^3 \\&= \frac{1}{j\omega} (e^{3j\omega} - e^{-3j\omega}) \\&= \frac{2}{\omega} \sin 3\omega\end{aligned}$$

6.2.3 通过常见函数的 Fourier 变换与相关性质求 Fourier 变换

利用 Fourier 变换的各种性质，如线性、位移、缩放、微分、积分等对原函数进行变换，化为容易计算的形式。

例题 6.3 求函数

$$f(t) = 2 \sin^2 t + \cos t$$

的 Fourier 变换

解 由

$$f(t) = 1 - \cos 2t + \cos t$$

知

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[1] - \mathcal{F}[\cos 2t] + \mathcal{F}[\cos t] = \pi[2\delta(\omega) + \delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 2) - \delta(\omega - 2)]$$

例题 6.4 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ 求函数

$$g(t) = t^3 f(2t)$$

的 Fourier 变换。

解 由缩放性质, 有

$$\mathcal{F}[f(2t)] = \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

由频域上的微分性质, 有

$$\mathcal{F}[t^3 f(2t)] = j^3 \frac{d^3}{d\omega^3} \left(\frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) = -\frac{j}{16} F'\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

例题 6.5 求函数

$$g(t) = \delta(t) + 2\delta'(t) + 3\delta''(t)$$

的 Fourier 变换

解 由 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ 和 Fourier 变换的微分性质, 得

$$\mathcal{F}[g(t)] = 1 + 2(j\omega) + 3(j\omega)^2 = 1 + 2j\omega - 3\omega^2$$

6.2.4 利用 Fourier 变换求反常积分

利用能量积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

可以很方便地计算被积函数形如 $[f(t)]^2$ 的积分。

例题 6.6 求反常积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

解 注意到

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{1+t^2} \right] = \frac{1}{2} e^{-|t|}$$

由能量积分, 得

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-|t|}\right)^2 dt = \pi \cdot 2 \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{\pi}{2}$$

6.2.5 求函数的卷积

根据卷积的定义

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

计算卷积, 这种题目中 $f_1(t), f_2(t)$ 往往是分段函数。

例题 6.7 求函数

$$f(t) = e^t u(t), g(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

的卷积

解

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-\tau} (t - \tau) d\tau \\ &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t + e^{-t} - 1, & t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

6.2.6 利用卷积定理求 Fourier 变换

例题 6.8 求函数

$$f(t) = \sin \omega_0 t \cdot u(t)$$

的 Fourier 变换

解 设

$$f_1(t) = \sin \omega_0 t, f_2(t) = u(t)$$

则

$$F_1(\omega) = \pi j [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)], F_2(\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

由卷积定理, 有

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi j [\delta(\tau + \omega_0) - \delta(\tau - \omega_0)] \left[\pi \delta(\omega - \tau) + \frac{1}{j(\omega - \tau)} \right] d\tau \\
 &= \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]
 \end{aligned}$$

第6章 练习

1. 设 $\delta(t)$ 是单位冲激函数, 求 $\mathcal{F}[\delta(3t + 3)]$

2. 求函数

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} \sin 2t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

的 Fourier 变换。

3. 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 求 $\mathcal{F}[f(1 - 2t)]$

解

1. 已知 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, 由 Fourier 变换的伸缩和位移性质知

$$\mathcal{F}[\delta(3t + 3)] = \mathcal{F}[\delta(3(t + 1))] = e^{j\omega} \mathcal{F}[\delta(3t)] = \frac{1}{3} e^{j\omega}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin 2t \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{2j} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-t+2jt-j\omega t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-t-2jt-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - 2j + j\omega} - \frac{1}{1 + 2j + j\omega} \right) \\
 &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{4j}{(1 + j\omega)^2 + 4} \\
 &= \frac{2}{(1 + j\omega)^2 + 4}
 \end{aligned}$$

3. 由伸缩性质, 知

$$\mathcal{F}[f(-2t)] = \frac{1}{2} F\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

由位移性质，知

$$\mathcal{F}[f(1-2t)] = e^{j\omega} \mathcal{F}[f(-2t)] = \frac{1}{2} e^{j\omega} F\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

第 7 章 Laplace 变换

7.1 主要内容

为叙述方便，约定在本章中出现的函数 $f(t)$ 都是 $f(t)u(t)$ ，即约定 $f(t) = 0(t < 0)$

7.1.1 Laplace 变换的定义

定义 7.1 (Laplace 变换)

称函数

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

为函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换，记作 $\mathcal{L}[f(t)]$ ，其中 s 是一个复参量。



定理 7.1 (Laplace 变换存在定理)

如果函数 $f(t)$ 满足如下条件：

1. 在 $t \geq 0$ 的任一有限区间内连续或分段连续；
2. 当 $t \rightarrow +\infty$ 时， $f(t)$ 的增长速度不超过某一指数函数，即存在常数 $M \geq 0, c \geq 0$ ，使得

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, 0 \leq t < +\infty$$

则 $f(t)$ 的 Laplace 变换

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

在半平面 $\operatorname{Re}(s) > c$ 上一定存在，且 $F(s)$ 为解析函数



7.1.2 常用函数的 Laplace 变换

1.

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

2.

$$\mathcal{L}[t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$$

3.

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

4.

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

5.

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

6.

$$\mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

7.

$$\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

7.1.3 Laplace 变换的性质

Laplace 变换具有如下性质 (设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$):

1. 线性性质:

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{L}[f_1(t)] + \beta \mathcal{L}[f_2(t)]$$

2. 时域微分:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

一般地, 有

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

3. s 域微分:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

4. 时域积分:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

5. s 域积分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(s) ds$$

该性质在计算形如

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

的积分时非常有用。

6. 位移性质：

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

7. 延迟性质：

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$$

8. 初值定理：如果 $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 存在，则

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

9. 终值定理：如果 $sF(s)$ 的所有奇点都在复平面的左侧，则

$$f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

证明如下：

1. 由积分的线性性质即得。

2.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt \\ &= f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= sF(s) - f(0)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(-1)^n F^{(n)}(s) &= \left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \right)^{(n)} \\ &= (-1)^n \int_0^{+\infty} f(t) \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-st} dt \\ &= (-1)^n \cdot (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}[t^n f(t)]\end{aligned}$$

4. 由时域微分性质即得。

5.

$$\int_0^{+\infty} F(s)ds = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \right] ds$$

交换积分次序, 得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} F(s) \mathrm{d}s &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} \mathrm{d}s \right] \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{-t} f(t) e^{-st} \Big|_0^{+\infty} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at} f(t)] &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(s-a)t} \mathrm{d}t \\ &= F(s-a)\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-\tau)] &= \int_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-st} \mathrm{d}t \\ &= e^{-s\tau} \int_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} \mathrm{d}(t-\tau) \\ &= e^{-s\tau} F(s)\end{aligned}$$

8. 由时域微分性质, 得

$$\int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} \mathrm{d}t = sF(s) - f(0)$$

两边取极限, 得

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} \mathrm{d}t = \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} sF(s) - f(0)$$

等式左边显然为 0, 因此

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} sF(s) = f(0)$$

由 $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 存在知

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} sF(s) = f(0)$$

9. 终值定理的证明方法与初值定理类似。

7.1.4 Laplace 变换下的卷积

在 Laplace 变换意义下, 卷积的定义变为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

定理 7.2 (Laplace 变换下的卷积定理)

设 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$, 则

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

**证明**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_0^{+\infty} [f_1(t) * f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_{\tau}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-st} dt \right] d\tau\end{aligned}$$

令 $t - \tau = u$, 则

$$\int_{\tau}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-st} d\tau = \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{-s(u+\tau)} du = e^{-s\tau} F_2(s)$$

所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} F_2(s) d\tau \\ &= F_2(s) \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= F_1(s) \cdot F_2(s)\end{aligned}$$

该定理表明两个函数卷积的 Laplace 变换等于它们 Laplace 变换的乘积。

7.1.5 Laplace 逆变换及其计算方法**定理 7.3 (Laplace 反演积分公式)**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s) e^{st} ds$$



证明 我们知道 $f(t)$ 的 Laplace 变换, 实际上就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 的 Fourier 变换, 因此, 由 Fourier 积分公式, 在 $f(t)$ 的连续点处有

$$\begin{aligned}f(t)u(t)e^{-\beta t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u\tau e^{-\beta\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \left[\int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-(\beta+j\omega)\tau} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta + j\omega) e^{j\omega t} d\omega\end{aligned}$$

两边同时乘以 $e^{\beta t}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta + j\omega) e^{\beta + j\omega} d\omega$$

令 $\beta + j\omega = s$, 有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta - j\infty}^{\beta + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Laplace 反演积分公式实际上是一个复变函数的积分, 计算起来比较困难。但是当它满足一定条件时, 可以用留数的方法计算它。

定理 7.4 (留数法计算反演积分)

若 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 是函数 $F(s)$ 的所有奇点, 它们都在左半平面 $Re(s) < \beta$ 内, 并且当 $s \rightarrow \infty$ 时, $F(s) \rightarrow 0$, 则有

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\beta - j\infty}^{\beta + j\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(s) e^{st}, s_k]$$



根据留数的计算方法, 如果函数 $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$, 设 $s_1, s_2, \dots, s_k$ 分别是 $B(s)$ 的 $m_1, m_2, \dots, m_k$ 级零点, 则

$$f(t) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(m_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{m_i-1}}{ds^{m_i-1}} \left[(s - s_i)^{m_i} \frac{A(s)}{B(s)} e^{st} \right]$$

7.2 考点解析

7.2.1 直接计算函数的 Laplace 变换

对于简单函数, 直接利用 Laplace 变换的定义

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

进行计算, 可以利用欧拉公式

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

将三角函数化为指数函数, 再利用

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$$

快速写出结果。

例题 7.1 求函数

$$f(t) \cos kt$$

的 Laplace 变换。

解

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\cos kt] &= \int_0^{+\infty} \cos kte^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{+\infty} e^{-(s+jk)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(s-jk)t} dt \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+jk} + \frac{1}{s-jk} \right) \\
 &= \frac{s}{s^2 + k^2}
 \end{aligned}$$

7.2.2 利用性质计算 Laplace 变换

这类题目的象原函数 $f(t)$ 通常是多种操作, 如缩放 ($f(t) = g(at)$), 位移 ($f(t) = e^{-\alpha t}$), 积分 ($f(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$), 乘以 t 等的组合, 计算时可“抽丝剥茧”, 先写出最内层函数的 Laplace 变换, 再逐层用性质计算。

例题 7.2 求函数

$$f(t) = \int_0^t \tau e^{-3\tau} \sin 2\tau d\tau$$

的 Laplace 变换。

解 由

$$\mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2 + 4}$$

由延迟性质, 知

$$\mathcal{L}[e^{-3t} \sin 2t] = \frac{2}{(s+3)^2 + 4}$$

由微分性质, 知

$$\mathcal{L}[te^{-3t} \sin 2t] = - \left(\frac{2}{(s+3)^2 + 4} \right)' = \frac{4(s+3)}{[(s+3)^2 + 4]^2}$$

由积分性质, 知

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t \tau e^{-3\tau} \sin 2\tau d\tau \right] = \frac{4(s+3)}{s[(s+3)^2 + 4]^2}$$

例题 7.3 求函数

$$f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}$$

的 Laplace 变换, 并计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t} dt$$

解

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-st} dt$$

并将函数

$$(1 - \cos t)e^{-st} = g(s, t)$$

看作一个整体, 则取 $g(s, t)$ 对 t 的 Laplace 变换, 变换后的参变量记作 u

$$\mathcal{L}[g(s, t)] = \frac{1}{u+s} - \frac{(u+s)}{(u+s)^2+1}$$

利用公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(s) ds$$

得

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u+s} - \frac{(u+s)}{(u+s)^2+1} \right) du = \frac{1}{2} \ln \frac{(u+s)^2}{(u+s)^2+1} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} \ln \frac{s^2}{s^2+4}$$

而

$$I = F(1) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \ln \sqrt{2}$$

注 分析往年考题可以发现, 性质

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(s) ds$$

的考察频率非常高, 请读者们务必掌握。

7.2.3 利用 Laplace 变换求积分

这类题目的被积函数通常具有

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{\alpha t} dt$$

的形式, 计算时可以取 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(s)$, 则 $F(\alpha)$ 就是所求积分。

值得注意的是, 被积函数中含有三角函数的积分也可以通过欧拉公式化为指数式, 即

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cos kt dt = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} f(t) e^{ikt} dt, \int_0^{+\infty} f(t) \sin kt dt = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} f(t) e^{ikt} dt$$

例题 7.4 计算

$$I = \int_0^{+\infty} t e^{-t} \sin 2t dt$$

解

$$I = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} t e^{-t} e^{2it} dt = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} t e^{(-1+2i)t} dt$$

因为

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

故

$$I = \operatorname{Im} \mathcal{L}[t]|_{s=-1+2j} = \frac{4}{25}$$

例题 7.5 求卷积 $t^m * t^n$, 其中 m 和 n 都是正整数。

解 由卷积定理, 有

$$\mathcal{L}[t^m * t^n] = \mathcal{L}[t^m] \cdot \mathcal{L}[t^n] = \frac{m!}{s^{m+1}} \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{m!n!}{s^{m+n+2}}$$

注意到

$$\frac{1}{s^{m+n+2}} = \frac{(-1)^{(m+n+1)}}{(m+n+1)!} \frac{\mathrm{d}^{m+n+1}}{\mathrm{d}s^{m+n+1}} \left(\frac{1}{s} \right)$$

因此

$$\mathcal{L}[t^m * t^n] = \frac{(-1)^{(m+n+1)} m!n!}{(m+n+1)!} \frac{\mathrm{d}^{m+n+1}}{\mathrm{d}s^{m+n+1}} \left(\frac{1}{s} \right)$$

由微分性质, 有

$$t^m * t^n = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} t^{m+n+1}$$

7.2.4 利用卷积定理求 Laplace 逆变换

这类题目的 $F(s)$ 通常是两个函数的乘积 $F_1(s) \cdot F_2(s)$ 的形式, 并且这两个函数的 Laplace 逆变换 $f_1(t), f_2(t)$ 容易求得, 再根据卷积定理

例题 7.6 求逆变换

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 4s + 13)^2} \right]$$

解 注意到

$$\frac{1}{(s^2 + 4s + 13)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{(s+2)^2 + 3^2} \cdot \frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}$$

而

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(s+2)^2 + 3^2} \right] = e^{-2t} \sin 3t$$

由卷积定理,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+4s+13)^2}\right] &= \frac{1}{9} [e^{-2t} \sin 3t * e^{-2t} \sin 3t] \\
 &= \frac{1}{9} \int_0^t e^{-2\tau} \sin 3\tau e^{-2(t-\tau)} \sin 3(t-\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{9} e^{-2t} \int_0^t \sin 3\tau \sin 3(t-\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{9} e^{-2t} \int_0^t \frac{1}{2} [\cos(6\tau-3t) - \cos 3t] d\tau \\
 &= \frac{1}{18} e^{-2t} \left[\frac{\sin(6\tau-3t)}{6} - \tau \cos 3t \right] \Big|_0^t \\
 &= \frac{1}{54} e^{-2t} (\sin 3t - 3t \cos 3t)
 \end{aligned}$$

例题 7.7 证明

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^t \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau$$

解 设 $F_1(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}, F_2(s) = \frac{1}{s-1}$

注意到

$$\mathcal{L}[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

取 $\alpha = -\frac{1}{2}$, 则

$$\mathcal{L}[t^{-\frac{1}{2}}] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}}$$

因此

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

下面计算 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, 令

$$I = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

设

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} dt$$

则

$$\begin{aligned}
 I'(\alpha) &= - \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-\alpha t} dt \\
 &= - \int_0^{+\infty} u e^{-\alpha u^2} du^2 (\sqrt{t} = u) \\
 &= -2 \int_0^{+\infty} u^2 e^{-\alpha u^2} du \\
 &= - \left(-\frac{u}{\alpha} e^{-\alpha u^2} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha u^2} du \right) \\
 &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} d\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha}}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \alpha^{-\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

因此

$$I(\alpha) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int \alpha^{-\frac{3}{2}} d\alpha = \sqrt{\pi} \alpha^{-\frac{1}{2}} + C$$

不难看出, 当 $\alpha \rightarrow +\infty$ 时, $I(\alpha) \rightarrow 0$, 从而 $C = 0$ 故

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = I(1) = \sqrt{\pi}$$

因此

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

另一方面,

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{s-1}\right] = e^t$$

因此

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * e^t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\tau} d\tau = \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^t \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau$$

注 上述过程中涉及到了积分

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

的计算, 它的原函数难以求出, 因此我们可以在积分式中插入一个参数 α , 使之成为 α 的函数 $I(\alpha)$, 而我们要计算的积分 I 实际上是函数 $I(\alpha)$ 在某一点 $\alpha = \alpha_0$ 处的值; 再考察 $I(\alpha)$ 的导数, 使积分变为相对容易计算的形式, 算出 $I'(\alpha)$ 关于 α 的表达式, 根据特殊点的值确定不定积分的常数 C , 最后再代入 $\alpha = \alpha_0$, 算出我们想要的积分。这样的方法称为**费曼积分法**, 它和 Fourier 变换、Laplace 变换一样, 都是通过某些方式将积分表达式转化为容易计算的形式, 再据此得到原积分, 读者可自行尝试用该方法计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \int_0^{+\infty} \frac{x-1}{\ln x} dx$$

等积分的值。

7.2.5 利用性质计算 Laplace 逆变换

在计算 Laplace 变换时,我们通过各种性质对时域函数 $f(t)$ 进行变换,化为容易计算的形式。类似地,在计算 Laplace 逆变换时,我们可以利用上述性质中对 s 域函数的变换,将 $F(s)$ 化为容易计算的形式。

例题 7.8 计算

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+s-6}$$

的 Laplace 逆变换。

解

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s-2)}$$

设

$$F(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-2}$$

用待定系数法,解得 $A = \frac{2}{5}, B = \frac{3}{5}$ 从而

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\frac{2}{5}}{s+3} + \frac{\frac{3}{5}}{s-2} \\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{5}(3e^{2t} + 2e^{-3t}) \end{aligned}$$

注 在上题中, $F(s)$ 是有理函数,可以用待定系数法将其拆成多个一次分式之和,再将这些分式的逆变换结果加起来得到原函数的 Laplace 逆变换,这种方法称作**部分分式法**。我们在学习高数中的有理函数积分时,就用到过类似的方法。

部分分式法为计算有理函数的 Laplace 变换提供了一种通用方法,再用延迟性质,就可以计算形如 $F(s) = A(s)e^{-\alpha t}$ 的 Laplace 逆变换,其中 $A(s)$ 是有理函数。因此对于其它形式的 $F(s)$,我们期望将它化为 $F(s) = A(s)e^{-\alpha t}$ 的形式, s 域微分性质是达成这一目标的重要途径。

例题 7.9 计算

$$F(s) = \ln \frac{s+1}{s-1}$$

的 Laplace 逆变换。

解 设 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, 则由微分性质,有

$$-F'(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}[tf(t)]$$

从而

$$tf(t) = e^t - e^{-t}$$

故

$$f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}$$

7.2.6 利用留数计算 Laplace 逆变换

利用留数法的公式计算即可。

例题 7.10 计算

$$F(s) = \frac{1}{s^4 - a^4}$$

的 Laplace 逆变换。

解

$$F(s) = \frac{1}{(s + aj)(s - aj)(s + a)(s - a)}$$

则 $s_1 = -aj, s_2 = aj, s_3 = -a, s_4 = a$ 是 $F(s)$ 的一阶零点，代入留数法计算公式，得

$$f(t) = \frac{e^{at}}{4a^3} - \frac{e^{-at}}{4a^3} - \frac{1}{2a^3} \sin at$$

7.2.7 利用 Laplace 变换解微分、积分方程

对微分方程两边取 Laplace 变换，利用性质

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

可将微分方程化为 s 域上的代数方程，解出未知函数的 Laplace 变换后取逆变换，就可以求得未知函数。Laplace 变换特别适合求解**初值问题**，即给定条件形如 $y(0) = k_1, y'(0) = k_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = k_n$ 的问题。

此类题目并无特别的技巧，但代数运算量较大，且为必考题，因此请读者多加练习。

例题 7.11 求方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 满足边界条件 $y(0) = 0, y(a) = 4$ 的解。

解 对方程两边取 Laplace 变换，设 $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ ：

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2sY(s) - y(0) + Y(s) = 0$$

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) = y'(0)$$

$$Y(s) = \frac{y'(0)}{(s-1)^2}$$

从而

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{y'(0)}{(s-1)^2} \right] = y'(0)te^t$$

由 $y(a) = y'(0)ae^a = 4$ 得 $y'(0) = \frac{4}{ae^a}$, 因此

$$y(t) = \frac{4te^t}{ae^a}$$

例题 7.12 求解微分方程组

$$\begin{cases} y'' - x'' + x' - y = e^t - 2 \\ 2y'' - x'' - 2y' + x = -t \end{cases}$$

满足条件

$$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

解 方程两侧作 Laplace 变换, 得

$$\begin{cases} (s^2 - 1)Y(s) - s(s - 1)X(s) = \frac{1}{s - 1} - \frac{2}{s} \\ 2s(s - 1)Y(s) - (s^2 - 1)X(s) = -\frac{1}{s^2} \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} X(s) = \frac{1}{(s - 1)^2} - \frac{1}{s^2} \\ Y(s) = \frac{1}{s(s - 1)^2} \end{cases}$$

取逆变换, 得

$$\begin{cases} x(t) = t(e^t - 1) \\ y(t) = 1 + e^t(t - 1) \end{cases}$$

第 7 章 练习

1. 求

$$F(s) = \frac{1}{(s + 1)^4}$$

的 Laplace 逆变换 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

2. 求

$$F(s) = \ln \frac{s + 1}{s^2 + 4}$$

的 Laplace 逆变换。

3. 求积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 4t}{t} e^{-3t} dt$$

的值。

4. 求积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin^2 t}{t} dt$$

5. 求解微分方程的初值问题:

$$x'' - x' - 2x = e^t + 1, x(0) = x'(0) = 0$$

6. 解方程

$$y'(t) + 4 \int_0^t y(t - \tau) d\tau = u(t - 2), y(0) = 3$$

7. 解常微分方程组

$$\begin{cases} x''(t) + y'' + x(t) + y(t) = 0, x(0) = y(0) = 0 \\ 2x''(t) - y''(t) - x(t) + y(t) = \sin t, x'(0) = y'(0) = -1 \end{cases}$$

8. 求解常微分方程

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = -1, y''(0) = y'(0) = 1, y(0) = 2$$

解

1. 已知 $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$, 由 Laplace 变换的时域积分性质知

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t] &= \mathcal{L}\left[\int_0^t dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2\right] &= \mathcal{L}\left[\int_0^t t dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^3} \\ \mathcal{L}\left[\frac{1}{6}t^3\right] &= \mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{1}{2}t^2 dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2\right] = \frac{1}{s^4} \end{aligned}$$

由 Laplace 变换的位移性质, 知

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{6}t^3 e^{-t}\right] = \frac{1}{(s+1)^4}$$

故

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^4}\right] = \frac{1}{6}t^3 e^{-t}$$

2. 由 Laplace 变换的 s 域微分性质, 知

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] \\ &= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{2s}{s^2+4}\right] \\ &= -\frac{1}{t}(e^{-t} - 2\cos 2t) \end{aligned}$$

3.

$$F(s) = \mathcal{L}[(1 - \cos 4t)e^{-3t}] = -\frac{s+3}{(s+3)^2 + 16} + \frac{1}{s+3}$$

由 Laplace 变换的 s 域积分性质, 知

$$I = \int_0^{+\infty} F(s) \mathrm{d}s = \ln \frac{s+3}{\sqrt{(s+3)^2 + 16}} \Big|_0^{+\infty} = \ln \frac{5}{3}$$

4.

$$\mathcal{L}[e^{-t} \sin^2 t] = \mathcal{L}\left[e^{-t} \left(-\frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2} \left(-\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{s+1}\right)$$

由 Laplace 变换的 s 域积分性质, 知

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(-\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{(s+1)}\right) \mathrm{d}s = \frac{1}{2} \ln \frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2 + 4}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4} \ln 5$$

5. 对方程两边取 Laplace 变换, 设 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$, 得

$$s^2 X(s) - sX(s) - 2X(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}$$

解得

$$X(s) = \frac{2s-1}{s(s-1)(s+1)(s-2)}$$

$X(s)$ 有奇点 $s=0, s=1, s=-1, s=2$, 利用留数法, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)e^{st} + \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)X(s)e^{st} + \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)X(s)e^{st} + \lim_{s \rightarrow 2} (s-2)X(s)e^{st} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{2t} \end{aligned}$$

故

$$x(t) = \frac{1}{2} (e^{2t} + e^{-t} - e^t - 1)$$

6. 方程两边取 Laplace 变换, 设 $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$

$$sY(s) - 3 + \frac{1}{s}Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

解得

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 4} + \frac{3s}{s^2 + 4}$$

故

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2} \sin(2(t-2))u(t-2) + 3 \cos 2t$$

7. 取 Laplace 变换, 设 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s), \mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$

$$\begin{cases} s^2 X(s) + 1 + s^2 Y(s) + 1 + X(s) + Y(s) = 0 \\ 2s^2 X(s) + 2 = s^2 Y(s) - 1 - X(s) - Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \end{cases}$$

解得

$$X(s) = Y(s) = -\frac{1}{s^2 + 1}$$

故

$$x(t) = y(t) = -\sin t$$

8. 方程两边取 Laplace 逆变换, 设 $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$

$$(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y(s) - 2s^2 + 5s - 4 = -\frac{1}{s}$$

解得

$$Y(s) = \frac{2s^3 - 5s^2 + 4s - 1}{s(s-1)^3}$$

$Y(s)$ 有一阶零点 $s = 0$, 三阶零点 $s = 1$, 代入留数法求逆变换公式:

$$y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)e^{st} + \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^{3-1}}{ds^{3-1}} [(s-1)^3 Y(s)e^{st}] = e^t + 1$$